TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A)

10 de Novembro de 2012, 9 horas

LEE, LEGI, LEIC (Taguspark), LERC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq \frac{x+1}{2}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| = 2\,|x|\}, \qquad C = (A \cup B) \cap \left[-\pi, \frac{1}{3}\right].$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cup B = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup [1, +\infty[\,.$$

Resolução:

$$x^2 \geq \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 0$$

pelo que $A =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$. Por outro lado,

$$|x-1| = 2|x| \Leftrightarrow x - 1 = 2x \vee x - 1 = -2x \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3},$$

logo $B = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$. Então,

$$A \cup B = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup [1, +\infty[\,.$$

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C e de $C \setminus \mathbb{Q}$.
Resolução:
Atendendo a que se tem

$$C = (A \cup B) \cap \left[-\pi, \frac{1}{3}\right] = \left[-\pi, -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

vem

$$\sup C = \max C = \frac{1}{3} \quad , \qquad \inf C = \min C = -\pi$$

$$\sup C \setminus \mathbb{Q} = -\frac{1}{2} \quad , \qquad \inf C \setminus \mathbb{Q} = \min C \setminus \mathbb{Q} = -\pi$$

e o conjunto $C \setminus \mathbb{Q}$ não tem máximo.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.
Resolução:
Proposição verdadeira; o conjunto C é limitado e toda a sucessão limitada tem, pelo menos, um sublimite (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

(ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C então $\lim \frac{(-1)^n}{n} u_n = 0$.
Resolução:
Proposição verdadeira; o conjunto C é limitado logo a sucessão $(-1)^n u_n$ é limitada. Como $\lim \frac{1}{n} = 0$,vem $\lim \frac{(-1)^n}{n} u_n = \lim [(-1)^n u_n] \frac{1}{n} = 0$.

2. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $1 \leq a_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

(1) Como $1 \leq a_1 = 2 \leq 2$, o resultado é verdadeiro para $n = 1$.

(2) Admitindo, por hipótese de indução, que o resultado é válido para n, provemo-lo para $n + 1$. Ora,

$$1 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_n} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{a_n} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \leq a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \leq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2$$

o que termina a demonstração.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

Resolução: Tem-se, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{-a_n^2 + 2a_n - 1}{a_n} = -\frac{(a_n - 1)^2}{a_n} \leq 0$$

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o limite.

Resolução: A sucessão a_n é limitada (alínea a)) e monótona (alínea b)), logo é convergente. Designando por $a = \lim a_n$ e atendendo a que a_{n+1} é subsucessão de a_n, conclui-se que, também, $a = \lim a_{n+1}$. Assim,

$$\lim a_{n+1} = 2 - \lim \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a = 2 - \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

3. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{(n+1)! - n!}{n!\,(2n+1)}, \qquad \lim \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 4(-1)^n}{3 - 2n^2}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n+2}{1+\pi^n}}, \qquad \lim \frac{1 + \operatorname{sen}(n^n)}{\sqrt{n}}.$$

Resolução:

$$\lim \frac{(n+1)! - n!}{n!\,(2n+1)} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{n!} - 1}{2n+1} = \lim \frac{n}{2n+1} = \lim \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{n^2 + 2\sqrt{n} + 4(-1)^n}{3 - 2n^2} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{4(-1)^n}{n^2}}{\frac{3}{n^2} - 2} = -\frac{1}{2}$$

Pondo $a_n = \frac{n+2}{1+\pi^n}$, vem

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+3)(1+\pi^n)}{(1+\pi^{n+1})(n+2)} = \lim \left(\frac{n+3}{n+2}\right)\left(\frac{1+\pi^n}{1+\pi^{n+1}}\right) = \lim \left(\frac{\frac{1}{\pi^n} + 1}{\frac{1}{\pi^n} + \pi}\right)\left(\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n}}\right) = \frac{1}{\pi}$$

e, portanto,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+2}{1+\pi^n}} = \frac{1}{\pi}$$

Finalmente e uma vez que $1 + \operatorname{sen}(n^n)$ é sucessão limitada e $\frac{1}{\sqrt{n}}$ é um infinitésimo, conclui-se que

$$\lim \frac{1 + \operatorname{sen}(n^n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1), & \text{se } x < 0, \\ x \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ e^{\frac{\pi}{2} - x}, & \text{se } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\pi}{2}-x} = 0.$$

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x), \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(x-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen} x = 0$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} x \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} e^{\frac{\pi}{2}-x} = 1.$$

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = \frac{\pi}{2}$? Justifique.

Resolução:

f não é prolongável por continuidade ao ponto $x = \frac{\pi}{2}$, dado que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$.

d) Indique o contradomínio de f.

Resolução:

Do T. do Valor intermédio e das alíneas anteriores, sabemos que

$$f\left(]-\infty,0[\right) = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[\qquad f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\qquad f\left(\left]\frac{\pi}{2},+\infty\right[\right) =]0,1[.$$

Então, o contradomínio vem

$$f\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left[0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

5. Seja f uma função real, definida e contínua no intervalo $[0,1]$. Seja (α_n) a sucessão de termo geral $\alpha_n = \frac{n-1}{n}$ e suponha que

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(\alpha_n)f(\alpha_{n+1}) < 0.$$

Mostre que $f(1) = 0$.

Resolução:

A sucessão (α_n) é convergente e $\lim \alpha_n = 1$; como f é função contínua no ponto 1, sabemos que $\lim f(\alpha_n) = f(1)$. Uma vez que α_{n+1} é subsucessão de α_n, também $f(\alpha_{n+1})$ é subsucessão de $f(\alpha_n)$ e, portanto, $\lim f(\alpha_n) = \lim f(\alpha_{n+1}) = f(1)$. Por hipótese, tem-se

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad f(\alpha_n)f(\alpha_{n+1}) < 0.$$

donde se conclui que

$$\lim\left[f(\alpha_n)f(\alpha_{n+1})\right] = (f(1))^2 \leq 0$$

e, consequentemente, $f(1) = 0$.