Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

Campus da Alameda **2 de Junho de 2012, 11:00 horas**

LEIC (Prova B)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{e^{-x}-e^{x}}, \qquad \lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x^3-1}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$x\cos x^2, \qquad \frac{x-1}{3x^2-6x+1}, \qquad \frac{x^2}{4+x^6}$$

3. Calcule a área da região plana definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq |x|, \quad y \leq 2-x^2\}$$

4. Seja g uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x} g(t)\,dt.$$

Calcule ψ' e ψ'' e mostre ainda que $\psi'(0) = \psi''(0) = 0$.

5. Determine a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+4}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e)^n}{4^{n-1}}$$

6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f(n) = (-1)^{n+1} n$$

Prove que, em $\overline{\mathbb{R}}$, não existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ e indique, justificando, o contradomínio de f'. [Sugestão: Utilize o Teorema de Lagrange em intervalos convenientes.]