Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

Campus da Alameda **2 de Junho de 2012, 11:00 horas**

LEIC (Prova A)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-e^{x}}{2x}, \qquad \lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x^2-1}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$x \operatorname{sen} x^2, \qquad \frac{x+1}{2x^2+4x+1}, \qquad \frac{x^2}{9+x^6}$$

3. Calcule a área da região plana definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \le 1-2x^2, \quad y \ge |x|\}$$

4. Seja f uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{\operatorname{sen} x} f(t)\,dt.$$

Calcule φ' e φ'' e mostre ainda que $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$.

5. Determine a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+1}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{e^n}$$

6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f(n) = (-1)^n n$$

Prove que, em $\overline{\mathbb{R}}$, não existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ e indique, justificando, o contradomínio de f'.
[Sugestão: Utilize o Teorema de Lagrange em intervalos convenientes.]