Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste/2º Teste/ Exame

Campus da Alameda **23 de Junho de 2012, 8:00 horas**

LEIC (Prova B)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

1. Considere
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-4}{x^2-4} \geq 1 \right\}, \qquad B = \mathbb{R}_0^+, \qquad C = A \cap B$$

   a) Escreva o conjunto A sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos e mostre que $C = \{0\} \cup [1, 2[$.

   b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\max C$, $\inf(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\min(C \cap \mathbb{Q})$, $\sup(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ e $\sup(C \cap \mathbb{Z})$.

2. Calcule ou mostre que não existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) cada um dos seguintes limites:
$$\lim \frac{2 + \pi n^3(n+1)^2}{3 + 2(n+3)^3 + 4n(n+2)^4}, \quad \lim \frac{n^2 + n2^n}{3 + n!}, \quad \lim \frac{\cos(2-5^n) - \sqrt{n}}{3 + 4n^2}, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{2n^n}\right)^{3n^n}$$

3. Considere uma sucessão real $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos negativos e minorada. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

   a) A sucessão b_n é limitada.

   b) O conjunto dos sublimites de b_n é não vazio.

   c) Se b_n é crescente, então b_n é convergente e $\lim b_n = 0$.

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que
$$g(x) = \begin{cases} \log(2-x) & \text{se } x < 1 \\ \operatorname{arcsen}(x-1) & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ -\operatorname{arctg} \frac{2}{x} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   a) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

   b) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites
$$\lim_{x\to1^-} g(x), \lim_{x\to1^+} g(x), \lim_{x\to2^-} g(x), \lim_{x\to2^+} g(x).$$

   c) Será g prolongável por continuidade ao ponto $x = 2$? Justifique.

   d) Indique o contradomínio de g.

5. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão tal que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n \in V_{\frac{1}{n}}(0) \cap \mathbb{R}^+, \qquad f(y_n) = \cos[1 + (-1)^n].$$

   Será a função f prolongável por continuidade ao ponto 0? Justifique a sua resposta.

2º Teste

1. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2 \operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x\to e^-} (\log x)^{\frac{2}{x-e}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{x^3}{2+x^4}, \qquad \frac{2\log x}{x}, \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{4+\cos^2 x}$$

3. Calcule, utilizando a substituição natural,

$$\int_0^3 \cos(\sqrt{x})\, dx$$

4. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}))$ e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(x) = f(\cos x) + \int_x^{x^2} f(t)\, dt.$$

   Calcule φ' e φ''.

5. Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$, determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 a^n}{n^2+1}.$$

6. Seja $g \in C^4(\mathbb{R})$ e suponha que $y = 1 + 2x$ é uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

   a) Calcule $g(0)$ e $g'(0)$. Poderá a função g ter um extremo local no ponto 0? Justifique.

   b) Supondo ainda que $g''(0) = g'''(0) = 2$ e que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad g^{(4)}(x) \leq 4,$$

   prove que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad g(x) \leq 1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6}.$$