Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda **14 de Abril de 2012, 11 horas**

LEIC (Prova B)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + x - 2}{x - 5} \leq 0 \right\}, \qquad B = A \cap [-2, e].$$

a) Escreva o conjunto A sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos e mostre que $B = \{-2\} \cup [1, e]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf B$, $\text{máx}(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\min(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\sup(B \cap \mathbb{Q})$ e $\text{máx}(B \cap \mathbb{N})$.

2. Calcule ou mostre que não existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) cada um dos seguintes limites:

$$\lim \frac{3 + 5n^2 + 2n(n+1)^3}{3n^4 + 1}, \quad \lim \frac{3^n + \pi^n + 3}{1 + 5^n}, \quad \lim \frac{\cos(n!) + \operatorname{arctg}(n^n)}{n^2 + 1}, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{\pi^n + 2}{e^n}} \quad .$$

3. Considere uma sucessão $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ b_{n+1} = \frac{1 + 2b_n}{5}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que $0 \leq b_n < \frac{1}{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Decida, justificando, se a sucessão (b_n) tem subsucessões convergentes.

4. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-e\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{e} & \text{se } x < -e \\ -\log(-x) & \text{se } -e < x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites

$$\lim_{x \to -e^-} g(x), \ \lim_{x \to -e^+} g(x), \ \lim_{x \to 0^-} g(x), \ \lim_{x \to 0^+} g(x).$$

c) Será g prolongável por continuidade ao ponto $x = -e$? Justifique.

d) Indique o contradomínio de g.

5. Sejam f, g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e considere a função $h = g - f$. Seja $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente decrescente de termos em $]a, b[$ tal que $\lim \alpha_n = a$ e

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad h(\alpha_n).h(\alpha_{n+1}) < 0.$$

Prove que

$$f(a) = g(a).$$