Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda **14 de Abril de 2012, 11 horas**

LEIC (Prova A)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \leq 0 \right\}, \qquad B = A \cap [1, \pi].$$

a) Escreva o conjunto A sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos e mostre que $B = \{1\} \cup [2, \pi]$.

Resolução:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x-4} \leq 0$$

		1		**2**		**4**	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	-	-	//	+
$\frac{x^2-3x+2}{x-4}$	-	0	+	0	-	//	+

e $A =]-\infty, 1] \cup [2, 4[$. Então, $B = A \cap [1, \pi] = \{1\} \cup [2, \pi]$.

---

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf B$, $\text{máx}(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\min(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\sup(B \cap \mathbb{Q})$ e $\text{máx}(B \cap \mathbb{N})$.

Resolução:

$$\inf B = 1, \quad \text{máx}(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \pi, \quad \sup(B \cap \mathbb{Q}) = \pi, \quad \text{máx}(B \cap \mathbb{N}) = 3.$$

e não existe $\min(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \min(]2, \pi] \setminus \mathbb{Q}))$.

---

2. Calcule ou mostre que não existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) cada um dos seguintes limites:

$$\lim \frac{5 + 10n^3 + n(n+1)^4}{2n^5 + 7}, \quad \lim \frac{3^n + 2^n + 1}{2 + \pi^n}, \quad \lim \frac{\text{arctg}(n!) + \text{sen}(n^n)}{n+1}, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{\pi^n}{1 + e^n}} \quad .$$

Resolução:

$$\lim \frac{5 + 10n^3 + n(n+1)^4}{2n^5 + 7} = \lim \frac{\frac{5}{n^5} + \frac{10}{n^2} + (\frac{n+1}{n})^4}{2 + \frac{7}{n^5}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{3^n + 2^n + 1}{2 + \pi^n} = \lim \frac{(\frac{3}{\pi}^n) + (\frac{2}{\pi})^n + \frac{1}{\pi^n}}{\frac{2}{\pi^n} + 1} = 0$$

$$\lim \frac{\text{arctg}(n!) + \text{sen}(n^n)}{n+1} = 0,$$

visto que é produto de um infinitésimo pela sucessão limitada $(\operatorname{arctg}(n!) + \operatorname{sen}(n^n))$.
Pondo $a_n = \frac{1}{1+e^n}$, tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1+e^n}{1+e^{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{e^n}+1}{\frac{1}{e^n}+e} = \frac{1}{e},$$

e, portanto,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{\pi^n}{1+e^n}} = \lim \pi \sqrt[n]{\frac{1}{1+e^n}} = \frac{\pi}{e}.$$

---

3. Considere uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{4}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que $0 < a_n < \frac{3}{2}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Resolução: (1) Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira: $0 < a_1 = 1 < \frac{3}{2}$. (2) Supondo, por hipótese de indução, $0 < a_n < \frac{3}{2}$, provemos para $n+1$:

$$0 < \frac{3}{4} < a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{4} < \frac{2\frac{3}{2}+3}{4} = \frac{3}{2},$$

o que termina a demonstração.

---

b) Decida, justificando, se a sucessão (a_n) tem subsucessões convergentes.

Resolução: De alínea a), sabemos que a sucessão a_n é limitada logo, por Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem subsucessões convergentes.

---

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x < 0 \\ \log x & \text{se } 0 < x \leq e \\ \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{e} & \text{se } x > e \end{cases}$$

a) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{e} = \frac{4}{\pi}.\frac{\pi}{2} = 2$$

---

b) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites

$$\lim_{x\to 0^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x),\ \lim_{x\to e^-} f(x),\ \lim_{x\to e^+} f(x).$$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} \log x = 1; \qquad \lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{e} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 1 = 1$$

---

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$? Justifique.

Resolução: A função f não é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$, uma vez que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

---

d) Indique o contradomínio de f.

Resolução: Dado que f é uma função contínua em $\mathbb{R}^-$, das alíneas anteriores e do Teorema do valor intermédio, $f(]-\infty, 0[) =]1, +\infty[$. De alínea b), sabemos que f é contínua no ponto e e, portanto, facilmente se conclui que f é contínua no intervalo $\mathbb{R}^+$. De novo, o Teorema do valor intermédio garante que $f(]0, +\infty[)$ é um intervalo e das alíneas precedentes, $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 2[$.
Então, $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[\cup]-\infty, 2[= \mathbb{R}$.

---

5. Sejam f, g funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e considere a função $h = g - f$. Seja $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente crescente de termos em $]a, b[$ tal que $\lim c_n = b$ e

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad h(c_n).h(c_{n+1}) < 0.$$

Prove que

$$f(b) = g(b).$$

Resolução:

Porque f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, sabemos que $h = g - f$ é contínua em $[a, b]$ e, em particular, é contínua no ponto $x = b$. Então, atendendo a que $\lim c_n = b$, tem-se

$$\lim h(c_n) = \lim h(c_{n+1}) = h(b).$$

Assim, e dado que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad h(c_n).h(c_{n+1}) < 0,$$

concluímos que se tem

$$\lim h(c_n).h(c_{n+1}) \le 0 \Leftrightarrow [h(b)]^2 \le 0 \Leftrightarrow h(b) = 0 \Leftrightarrow g(b) = f(b),$$

como pretendíamos mostrar.
