Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

Campus da Alameda **4 de Junho de 2011, 11:30 horas**

LEIC (Prova A)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2x}}$$

Resolução: Uma vez que, no 1º limite, obtemos uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$, aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = 1,$$

Quanto ao 2º, é imediato que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos x} = 0,$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{2x}\log x}$$

e aplicando a regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{2x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{2x}} = e^0 = 1.$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}, \qquad \frac{x+1}{4+x^2}$$

Resolução:

$$P\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$P\frac{x+1}{4+x^2} = P\frac{x}{4+x^2} + P\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{2}\log|4+x^2| + \frac{1}{4}P\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\log(4+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pelos gráficos das funções $|x|-1$ e $2x^2-2$.

Resolução: A área pretendida é dada por

$$\int_{-1}^{1}\left(|x|-1-\left(2x^2-2\right)\right)\,dx = 2\int_0^1\left(x-1-2x^2+2\right)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}+x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}+1-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

4. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{\cos x} f(t)\, dt.$$

Calcule φ' e φ''.

Resolução: Para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -\operatorname{sen} x . f(\cos x) - f(x)$$
$$\varphi''(x) = -\cos x . f(\cos x) + \operatorname{sen}^2 x . f'(\cos x) - f'(x)$$

5. Determine a natureza das seguintes séries e calcule a soma de uma delas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2+n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n-1}}{5^n}$$

Resolução: Com $a_n = \frac{2n}{3n^2+n+1}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, vem

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{2n^2}{3n^2+n+1} = \frac{2}{3}$$

Porque $\frac{2}{3} \in]0, +\infty[$, concluímos que as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3n^2+n+1}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ são da mesma natureza; então a primeira série dada é divergente.
Quanto à segunda,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n-1}}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n,$$

é soma de duas séries geométricas de razões $\frac{-1}{5}$ e $\frac{3}{5}$; dado que $|\frac{-1}{5}| < 1$ e $|\frac{3}{5}| < 1$, a série dada é convergente e tem soma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n-1}}{5^n} = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}.$$

6. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e tal que

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad f(n) = (-1)^n$$

Prove que não existe, em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.

Resolução: Para todo o $n \in \mathbb{N}$, consideremos o intervalo $[2n, 2n+1]$; por hipótese, f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, logo é contínua em $[2n, 2n+1]$ e diferenciável em $]2n, 2n+1[$. Do Teorema de Lagrange sabemos que

$$\exists a_n \in]2n, 2n+1[: \qquad \frac{f(2n+1) - f(2n)}{2n+1-2n} = -2 = f'(a_n).$$

Uma vez que $a_n > 2n$, tem-se $\lim a_n = +\infty$ e $\lim f'(a_n) = -2$.
Procedendo de forma análoga para o intervalo $[2n+1, 2n+2]$ $(n \in \mathbb{N})$, vem

$$\exists b_n \in]2n+1, 2n+2[: \qquad \frac{f(2n+2) - f(2n+1)}{2n+2-(2n+1)} = 2 = f'(b_n)$$

com $\lim b_n = +\infty$ e $\lim f'(b_n) = 2 \neq \lim f'(a_n)$.
Concluímos então que não existe $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.