Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda **9 de Abril de 2011, 13 horas**

LEIC (Prova A)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^x(x-1)}{x^2-4} \geq 0 \right\}, \qquad B = \{\, x \in \mathbb{R} : \ |x-1| \leq 1 \}, \qquad C = B \setminus \ A.$$

a) Escreva cada um dos conjuntos B e C sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos e mostre que $A = \,]-2,1] \cup \,]2,+\infty[$.

Resolução:

Dado que $e^x > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\frac{e^x(x-1)}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow \big(x-1 \geq 0 \wedge x^2-4 > 0\big) \vee \big(x-1 \leq 0 \wedge x^2-4 < 0\big)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge (x < -2 \vee x > 2)) \vee (x \leq 1 \wedge -2 < x < 2) \Leftrightarrow x \in \,]-2,1] \cup \,]2,+\infty[\,,$$

pelo que $A = \,]-2,1] \cup \,]2,+\infty[$.

$$|x-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

e $B = [0,2]$. Finalmente, $C = \,]1,2]\,$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\sup A$, $\min C$, $\inf(A \cap B)$, $\text{máx}(B \setminus \mathbb{Q})$.

Resolução:

$\inf A = -2$; A não é majorado, logo não existe $\sup A$,
não existe $\min C$ $(1 \notin C)$; $\inf(A \cap B) = \inf\,[0,1] = 0$;
não existe $\text{máx}(B \setminus \mathbb{Q})(2 \notin B \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap \mathbb{R}^-$ é convergente.
Resolução:
Verdadeira: $A \cap \mathbb{R}^-$ é um conjunto minorado e toda a sucessão decrescente e minorada é convergente.

(ii) Toda a sucessão de termos em B tem uma subsucessão convergente.
Resolução:
Verdadeira: B é um conjunto limitado e toda a sucessão limitada tem , pelo menos, um sublimite (Teorema de Bolzano- Weierstrass).

(iii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em B converge para 2.
Resolução:
Falsa: por exemplo, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ é sucessão crescente, de termos em B e tende para 1.

2. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{5^n - n!}{1+7^n}, \quad \lim \left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right)^{n^2+1}, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{1+e^n}{n^2}}$$

Resolução:

$$\lim \frac{5^n - n!}{1+7^n} = \lim \frac{\frac{5^n}{n!} - 1}{\frac{1}{n!} + \frac{7^n}{n!}} = -\infty$$

$$\lim \left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right)^{n^2+1} = \lim \left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right)\left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right)^{n^2} = e^{-\pi}$$

Com $a_n = \frac{1+e^n}{n^2}$, consideremos

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1+e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{1+e^n}{n^2}} = \lim \frac{\frac{1}{e^n} + e}{\frac{1}{e^n} + 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = e$$

pelo que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1+e^n}{n^2}} = e.$$

3. Considere uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = \pi, \\ a_{n+1} = \frac{\pi}{n+1} a_n, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e conclua que

$$\forall_{n\geq 3} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Resolução:
Se $n = 1$, tem-se $a_1 = \pi > 0$.
Supondo, por hipótese de indução, que $a_n > 0$ é imediato que $a_{n+1} = \frac{\pi}{n+1} a_n > 0$. Provámos pois que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Então,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{4} \leq 1, \forall_{n\geq 3}.$$

b) Justifique que (a_n) é convergente e mostre que $\lim a_n = 0$.
Resolução:
Da alínea a), sabemos que

$$\forall_{n\geq 3} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

e a_n é sucessão decrescente (a partir da ordem $n = 3$); como é minorada, concluímos que a_n é convergente. Se $a = \lim a_n$,

$$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{\pi}{n+1} a_n = 0$$

c) Use indução matemática para mostrar que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n = \frac{\pi^n}{n!}$$

Resolução:

Se $n=1$, tem-se $a_1=\pi=\frac{\pi}{1!}$.
Por hipótese de indução, $a_n=\frac{\pi^n}{n!}$, logo

$$a_{n+1}=\frac{\pi}{n+1}a_n=\frac{\pi}{n+1}\frac{\pi^n}{n!}=\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Concluímos que o resultado é válido para todo o $n\in\mathbb{N}$.

4. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites

$$\lim_{x\to e}\frac{x(x-e)}{\operatorname{sen}(x-e)},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos x^2+1}{2-x^3}$$

Resolução:
Uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}=1$,

$$\lim_{x\to e}\frac{x(x-e)}{\operatorname{sen}(x-e)}=\lim_{y\to 0}\frac{(y+e)y}{\operatorname{sen}y}=e.$$

Dado que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x^2}{x}=0$ (produto de um infinitésimo por uma função limitada),

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cos x^2+1}{2-x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cos x^2}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-1}=0.$$

5. Considere a função real de variável real f tal que

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} & \text{se } x<-1\\ \operatorname{arcsen}x & \text{se } -1<x\leq 1\\ \log(x-1) & \text{se } x>1\end{cases}$$

a) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to 1}f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}=0.$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcsen}x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log(x-1)=-\infty,$$

logo, não existe limite de f no ponto $x=1$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\log(x-1)=+\infty$$

b) Estude f quanto a continuidade. Será f prolongável por continuidade ao ponto $x=-1$? Justifique.
Resolução:
f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$: em $]-\infty,-1[$ é composta de uma função racional com a função arcotangente ; em $]-1,1[$, $f(x)=\operatorname{arcsen}x$ e em $]1,+\infty[$, f é composta de uma função polinomial com a função logaritmo.
como vimos, não existe limite de f no ponto $x=1$, pelo que f não é contínua no ponto 1.
Finalmente,

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}=-\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\operatorname{arcsen}x=-\frac{\pi}{2}$$

o que mostra que existe $\lim_{x\to-1}f(x)$ e f é prolongável por continuidade ao ponto $x=-1$.

6. Seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o termo geral de uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^+$. Prove que:

a) Se $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \alpha < 1$, então a sucessão (b_n) é convergente e $\lim b_n = 0$.
Resolução:
Da definição de limite de uma sucessão, tomando $\epsilon = 1 - \alpha > 0$,

$$\exists_{p\in\mathbb{N}} \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad n > p \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} < \alpha + \epsilon = 1$$

e como $b_n > 0$,

$$\exists_{p\in\mathbb{N}} \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad n > p \Rightarrow b_{n+1} < b_n$$

Então, $b_n > 0$ é sucessão decrescente (a partir de certa ordem) e é minorada, logo é convergente. Se $b = \lim b_n$, tem-se $b \geq 0$; se $b > 0$,

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b}{b} = 1 = \alpha < 1$$

o que é absurdo. Assim, $b = 0$.

b) Se $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \alpha > 1$, então $\lim b_n = +\infty$.
Resolução:
Tomando $a_n = \frac{1}{b_n}$ $(n \in \mathbb{N})$, vem

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Da alínea a), concluímos que $\lim a_n = 0$ e porque $b_n > 0$, $\lim b_n = +\infty$.