Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

Campus da Alameda **7 de Julho de 2010, 17 horas**

LEMat, LEAN, MEAer, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-3}{x-4} \leq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^x(4-x^2) \geq 0 \right\}.$$

a) Escreva cada um dos conjuntos A e B sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos. Mostre que $A \setminus B =]2, 4[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf B$, $\sup A$, $\min(B \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\text{máx}(A \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

i) Toda a sucessão crescente de termos em $A \setminus B$ tem todas as subsucessões convergentes.

ii) Se f é função definida e contínua em B, então f é limitada.

iii) Se a_n é sucessão de termos em $A \setminus B$, a série $\sum a_n$ é divergente.

2. Prove por indução matemática

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k + 3}{4^{k-1}} = \frac{4^{n+1} - 3^{n+1} - 1}{4^{n-1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

II. 1. a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries (convergência simples, absoluta ou divergência)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n + n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n! 2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{3^{n+1}}$$

b) Calcule a soma de uma das séries anteriores.

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções

$$\text{sen}(x^2 + \cos x), \qquad \log\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3. Calcule o limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x \frac{\text{sen}(\pi t)}{t}\, dt}{\text{sen}^2(\pi x)}$$

III. 1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}, \qquad \frac{\cos(\text{arctg}\, x)}{1+x^2}$$

2. Calcule
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

3. Calcule a área da região do plano definida por
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x(x-\pi)\le y\le \operatorname{sen} x\right\}.$$

4. Seja $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função dada por
$$\psi(x)=\int_1^{x^2} e^{\sqrt{t}}\,dt.$$

   a) Calcule ψ'. Determine os intervalos de monotonia de ψ e os respectivos extremos locais e absolutos, se os houver.
   b) Estude o sentido das concavidades do gráfico de ψ e pontos de inflexão.

IV. Seja f uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ e
$$\exists C>0 \qquad \forall x>0 \qquad |f'(x)|\le Ce^x.$$

Mostre que
$$\forall x\ge 0 \qquad |f(x)|\le Cxe^x.$$