Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste e 1º Exame

Campus da Alameda **21 de Junho de 2010, 17 horas**

LEMat, LEAN, MEAer, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para o 2º teste responda unicamente II 1., II 3., III e IV

I. 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x} \leq x+2 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{x-1} \geq 0 \right\}, \qquad C = \{ \, x \in \mathbb{R} : |x+1| < 1 \} \, .$$

a) Escreva cada um dos conjuntos A e B sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos. Mostre que $A \cap C = \left]-2, -\frac{1}{2}\right]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\min B$, $\sup B$, $\sup(B \cap C)$, $\max(A \cap C)$ e $\inf(A \cap C)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em A é divergente.

(ii) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap C$ é convergente.

(iii) Toda a função definida e contínua em $A \cap C$ tem máximo.

2. Prove por indução matemática

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

II. 1. (para o 2ª TESTE, considere apenas as 2ª e 4ª séries)

a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries (convergência simples, absoluta ou divergência)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n^2}{2+3n^3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+3^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{1+4^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+1}{5^n}$$

b) Calcule a soma de uma das séries anteriores.

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções

$$x \operatorname{arctg} x^5, \qquad \log(e^{2x} - x).$$

3. Calcule o limite

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

III. 1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes (para o 2ª TESTE, considere apenas as 1ª e 4ª funções)

$$x + x \operatorname{sen} x^2, \qquad \frac{e^x}{e^x+1}, \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \frac{2x}{4+x^4}.$$

2. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $g(x) = \frac{\pi}{4}x$.
3. Considere a função f dada por

$$f(x) = -2e^{\frac{1}{x}} + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^t}{t}\, dt.$$

   a) Justificando, determine o domínio de f, o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
   b) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais e absolutos, se os houver.

IV. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log x$.

a) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(e, 1)$. Designe esta função por ψ.

b) Mostre que

$$\forall x \in V_{1/2}(e) \qquad |f(x) - \psi(x)| < \frac{1}{8(e - \frac{1}{2})^2}.$$