Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda **24 de Abril de 2010, 11 horas**

LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+4}{x} < 2 + x \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : \ |x - e| \le e \}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Escreva cada um dos conjuntos A e B sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos. Mostre que $C =]2, 2e]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\sup B$, $\sup C$, $\max(C \cap \mathbb{Q})$, $\min(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.

(ii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em C tem todas as subsucessões convergentes.

(iii) Toda a sucessão decrescente de termos em C converge para 2.

II. 1. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{(-1)^n\,(n + \cos n)}{n^3}, \quad \lim \left(1 - \frac{\pi}{2n}\right)^n, \quad \lim \sqrt[n]{\frac{1+3^n}{n}}$$

2. Por indução matemática, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

III. 1. Considere a função real de variável real f tal que

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log \frac{1}{x}\right).$$

a) Determine o domínio de f e calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Estude f quanto a continuidade. Será f prolongável por continuidade ao ponto zero? Justifique.

c) Indique, justificando, o contradomínio de f.

2. Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$. Suponha que se tem

$$g\left((-1)^n + \frac{2n}{n+1}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Indique, justificando, os valores de $g(1)$ e de $g(3)$.