

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste e 1º Exame

Campus da Alameda

12 de Janeiro de 2009, 9 horas

LEAmb, LEMat, LEANaval, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para o 2º teste responda unicamente II 1., II 2., III e IV

- I. 1. Prove por indução matemática a seguinte proposição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^2 + n}{2} \in \mathbb{N}$$

2. Seja (a_n) uma qualquer sucessão de números reais, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e S o conjunto dos seus sublimites. Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Se $S = \{0, 1\}$, (a_n) não é convergente.
- (ii) Se $A = \{0, 1\}$, (a_n) não é convergente.
- (iii) Se A é limitado então S é não vazio.
- (iv) Se (a_n) é crescente e A é limitado então S tem um e um só elemento.

3. Considere a função

$$g(x) = \frac{(x+1) \log x}{|x-1|}$$

- a) Estude o sinal de g e, caso existam, determine os seus zeros.
- b) Estude g quanto a continuidade e diga, justificando, se é prolongável por continuidade ao ponto 1.

- II. 1. Sejam f e g as funções definidas em \mathbb{R} por

$$f(x) = \log(1 + e^{x^2}), \quad g(x) = \operatorname{sen}(\cos x).$$

Calcule f' e g' ; justifique que as funções f e g têm um extremo local no ponto zero.

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{e^x}{3 + 2e^x}, \quad \frac{e^x}{3 + 2e^{2x}}, \quad x\sqrt{3x^2 + 5}.$$

3. (Apenas para o exame) Determine a única função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x}, \quad f(1) = \pi, \quad f(-1) = 0.$$

- III. Considere a função f definida em \mathbb{R}^+ por

$$f(x) = 2x \log x.$$

- a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e determine os zeros de f .
- b) Estude f quanto a monotonia e existência de extremos locais.
- c) Determine o sentido das concavidades do gráfico de f .

d) Determine a área da região plana delimitada pelos gráficos da função f e da função $\log x$.

IV. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e seja ψ a função definida em \mathbb{R} por

$$\psi(x) = f(x^2 - x) + \int_0^{x^2 - x} f(t) dt.$$

a) Calcule ψ' e ψ'' .

b) Supondo que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$, justifique que f e ψ têm em zero um extremo local da mesma natureza.