Cálculo Diferencial e Integral I

LEAmb, LEMat, LQ, MEB, MEEC, MEQ

2º teste / 1º exame - 7 de Janeiro de 2008

duração: 2º teste: 1:30 / 1º exame: 3:00

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para resolver o 2º teste responda apenas aos grupos III e IV.

(4.5 vals.) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{5+x}{2} > |x-1| \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{(x^2)} > 1 \right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]-1,0[\cup]0,7[$.

Conjunto A:
Caso $x - 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq 1$:

$$\frac{5+x}{2} > x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5+x}{2} - x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7-x}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 7\,.$$

Caso $x - 1 < 0$, ou seja, $x < 1$:

$$\frac{5+x}{2} > -x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5+x}{2} + x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3+3x}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1\,.$$

Logo $A =]-1,1[\cup [1,7] =]-1,7[$.
Conjunto B:

$$e^{(x^2)} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0\,.$$

Logo, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Portanto, $A \cap B =]-1,7[\setminus \{0\} =]-1,0[\cup]0,7[$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$),

$$\min A, \quad \sup A, \quad \max(A \cap B), \quad \inf(A \cap B \cap \mathbb{R}^+), \quad \sup[(A \cap B) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})],$$

$$\min A \text{ não existe}, \qquad \sup A = 7, \qquad \max(A \cap B) \text{ não existe},$$
$$\inf(A \cap B \cap \mathbb{R}^+) = 0, \qquad \sup[(A \cap B) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})] \text{ não existe}.$$

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em $A \cap B$ tem limite em $\mathbb{R}^+$.

Falsa. Um contraexemplo: $u_n = -\frac{1}{2n}$. Todos os seus termos estão em $A \cap B$, é estritamente crescente e $u_n \to 0 \notin \mathbb{R}^+$.

(ii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem pelo menos um sublimite.

Verdadeira. Como $A \cap B$ é um conjunto limitado, qualquer sucessão u_n de termos em $A \cap B$ é uma sucessão limitada. O teorema de Bolzano-Weierstrass garante então que u_n tem pelo menos uma subsucessão convergente e, portanto, tem pelo menos um sublimite.

(iii) Se x_n é uma sucessão monótona de termos em $A \cap B$, então $(\cos x_n)$ é uma sucessão convergente.

Verdadeira. Se x_n é uma sucessão monótona em $A \cap B$ então, além de monótona ela é limitada. Então, como qualquer sucessão limitada e monótona é convergente, x_n é convergente. Como a função cosseno é contínua em $\mathbb{R}$, se $x_n \to a$ então $\cos x_n \to \cos a$.

(3 vals.) **II.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2^n - n + 1}{3^n + n^2}, \qquad \lim \left[\log \frac{(n+1)!}{n^2} - \log \frac{n!}{2n+1}\right], \qquad \lim \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}.$$

$$\lim \frac{2^n - n + 1}{3^n + n^2} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1 - \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}} = 0 \cdot 1 = 0\,.$$

$$\lim \left[\log \frac{(n+1)!}{n^2} - \log \frac{n!}{2n+1}\right] = \lim \log \frac{(n+1)!(2n+1)}{n^2 n!} = \lim \log \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$
$$= \lim \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \log 2.$$

$$\lim \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^2\,.$$

(2.5 vals.) 2. Considere a sucessão a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2\,, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + a_n}\,, \quad \text{se } n \geq 1\,. \end{cases}$$

a) Mostre que, se $n \geq 2$, então $a_n \in \left]0, 1\right[$.

Para $n = 2$: $a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{2}{3}$. Logo, $a_2 \in \left]0, 1\right[$ é verdadeira.
Admitamos agora, como hipótese de indução, que para um natural $n \geq 2$, $a_n \in \left]0, 1\right[$. Então,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n} > 0, \qquad \text{dado que } a_n > 0.$$

Por outro lado,

$$0 < a_n < 1 + a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{1 + a_n} < 1\,.$$

Logo, $a_{n+1} \in \left]0, 1\right[$. Isto prova que

$$\forall_{n \geq 2} \quad \left(a_n \in \left]0, 1\right[\;\Rightarrow\; a_{n+1} \in \left]0, 1\right[\right)\,.$$

Fica assim provado por indução que

$$\forall_{n \geq 2} \quad a_n \in \left]0, 1\right[\,.$$

b) Prove que a_n é monótona decrescente.

Como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$ temos

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{1+a_n} - a_n = -\frac{a_n^2}{1+a_n} < 0.$$

c) Justifique que a_n é convergente e calcule $\lim a_n$.

Pela alínea a) sabemos que a_n é uma sucessão limitada (minorada e majorada). Pela alínea b) sabemos que a_n é monótona. Como qualquer sucessão monótona e limitada é convergente, concluimos que a_n é convergente, ou seja, existe $l := \lim a_n$ em $\mathbb{R}$. Então, como $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$, temos

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{1+a_n} \quad \Leftrightarrow \quad l = \frac{l}{1+l} \quad \Leftrightarrow \quad l(l+1) - l = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad l^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = 0.$$

Para o 2º Teste responda apenas às questões desta página

(1.8 vals.) **III.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (\log x)^x, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen}(x-1)}{x-1}.$$

O primeiro limite, na forma em que está escrito, é uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Como, para $x > 0$,

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(\cos x)}{x}},$$

e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(\cos x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, usamos a regra de Cauchy para esta indeterminação. De

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(\cos x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x} = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(\cos x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x}} = e^0 = 1\,.$$

Segundo limite:

$$\lim_{x\to +\infty} (\log x)^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x \log(\log x)} = +\infty\,.$$

Terceiro limite: trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ à qual aplicamos a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\operatorname{arcsen}(x-1))'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}{1} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen}(x-1)}{x-1} = 1\,.$$

(4 vals.) 2. Seja α uma constante real e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg} x & \text{se } x>0\\ e^x-\dfrac{x}{2}+\alpha & \text{se } x\le 0\,. \end{cases}$$

a) Determine α por forma que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a função é contínua (justificação habitual).

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\operatorname{arctg} x=0\cdot 0=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=e^0-\frac{0}{2}+\alpha=1+\alpha.$$

A condição necessária e suficiente da continuidade de f em 0,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\,,$$

traduz-se então na condição $1+\alpha=0$ ou seja, $\alpha=-1$.

b) Calcule, se existirem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-\frac{x}{2}-1)=0-\frac{-\infty}{2}-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arctg} x=+\infty\cdot\frac{\pi}{2}=+\infty\,.$$

c) Será f diferenciável no ponto zero? Determine a função f'.

Por definição, a derivada lateral esquerda em 0 é

$$f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-\frac{x}{2}-1}{x}$$

Para levantar esta indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicamos a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^x-\frac{x}{2}-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Logo

$$f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-\frac{x}{2}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

A derivada lateral direita em 0 é dada por

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg} x=0.$$

Como $f'_e(0)\neq f'_d(0)$ concluimos que não existe $f'(0)$ e portanto f não é diferenciável em 0.
A função f' tem como domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e é dada por

$$f'(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2} & \text{se } x>0\\ e^x-\frac{1}{2} & \text{se } x<0\end{cases}$$

d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

Para $x < 0$:
$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log \frac{1}{2} = -\log 2\,,$
$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\log 2\,,$
$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\log 2 < x < 0.$
Para $x > 0$:
$f'(x) > 0$, para todo $x > 0$.
Logo, usando o facto de f ser crescente em $]-\log 2, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e **de f ser contínua em $x = 0$**, concluímos que

$$f \text{ é estritamente crescente em } \;]-\log 2, +\infty[\;,$$
$$f \text{ é estritamente decrescente em } \;]-\infty, -\log 2[\;,$$

e f tem um único ponto de extremo local em $x = -\log 2$ que é ponto de mínimo local (na realidade é também global).

e) Diga, justificando, qual é o contradomínio de f.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto transforma intervalos em intervalos. Usando a informação obtida nas alíneas a) e d), e pelo facto de

$$f(-\log 2) = \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2} - 1 = \frac{\log 2 - 1}{2}$$

podemos dizer que

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, -\log 2[) \cup f([-\log 2, +\infty]) = \left] \frac{\log 2 - 1}{2}, +\infty \right[\cup \left[\frac{\log 2 - 1}{2}, +\infty \right[$$

$$= \left[\frac{\log 2 - 1}{2}, +\infty \right[\,.$$

(1.2 vals.) **IV.** 1. Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{2 + x^2}\, dx\,, \qquad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx\,.$$

$$\int_0^1 x\sqrt{2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2 + x^2)'(2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(2 + x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}\,.$$

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}\,.$$

(1 vals.) 2. Calcule a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções

$$y = x + 1\,, \qquad y = e^{-x}\,,$$

e pelas rectas

$$x = -2\,, \qquad x = 1\,.$$

Como se depreende facilmente de um esboço da região, a área pedida é o número A dado por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} (e^{-x} - (x+1))\,dx + \int_{0}^{1} ((x+1) - e^{-x})\,dx \\ &= \left[-e^{-x} - \frac{(x+1)^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{(x+1)^2}{2} + e^{-x}\right]_{0}^{1} \\ &= \left(\left(-1-\frac{1}{2}\right) - \left(-e^2 - \frac{1}{2}\right)\right) + \left((2+e^{-1}) - \left(\frac{1}{2}+1\right)\right) \\ &= e^2 + e^{-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2 vals.) 3. Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(x) > 2$, para todo $x > 0$. Considere a função f definida por

$$\forall_{x>0} \quad f(x) = \int_{1/x}^{x} g(t)\,dt\,.$$

a) Mostre que

$$\forall_{x>0} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)\,,$$

e estude o sinal de f em $\mathbb{R}^+$.

Para cada $x > 0$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{\frac{1}{\frac{1}{x}}}^{\frac{1}{x}} g = \int_{x}^{\frac{1}{x}} g = -\int_{\frac{1}{x}}^{x} g = -f(x)\,.$$

O caso $x = \frac{1}{x}$ em $]0, +\infty[$ verifica-se sse $x = 1$, e temos

$$f(1) = \int_1^1 g = 0.$$

Se $x > 1$, temos $x > \frac{1}{x}$ e, portanto

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} g > \int_{\frac{1}{x}}^{x} 2 = 2\left(x - \frac{1}{x}\right) > 0.$$

Por outro lado, se $0 < x < 1$, então $\frac{1}{x} > 1$ e

$$-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) > 0,$$

e portanto, $f(x) < 0$.

b) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule f'.

Seja, para cada $x > 0$,

$$\varphi(x) = \int_1^x g.$$

Como g é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, φ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e $\varphi'(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Como $f(x) = \varphi(x) - \varphi(1/x)$, conclui-se que f é diferenciável por ser a diferença entre a função φ diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e a composta de φ com a função $\frac{1}{x}$ que é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ com contradomínio em $\mathbb{R}^+$. Além disso,

$$f'(x) = \left(\varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \varphi'(x) - \varphi'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' = g(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right).$$