Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

Campus da Alameda — **18 de Novembro de 2006, 9 horas**

Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

(7) **I.** 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{1+x} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^x - 1} \leq 0 \right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]-1, 0[$.

Por um lado

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|}{1+x} \geq 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{1+x} \geq 1 \ \wedge \ x \geq 2 \right) \ \vee \ \left(\frac{-x+2}{1+x} \geq 1 \ \wedge \ x \leq 2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-3}{1+x} \geq 0 \ \wedge \ x \geq 2 \right) \ \vee \ \left(\frac{-2x+1}{1+x} \geq 0 \ \wedge \ x \leq 2 \right) \\ &\Leftrightarrow x \in]-1, 1/2] \end{aligned}$$

pelo que $A =]-1, 1/2]$.
Por outro lado

$$\frac{1}{e^x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

pelo que $B =]-\infty, 0[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup(B \setminus A)$, $\sup((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$, $\max((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$.

$\sup A = 1/2$, $\inf B$ não existe em $\mathbb{R}$, $\sup(B \setminus A) = \sup]-\infty, -1] = -1$, $\sup((A \cap B) \setminus \mathbb{Q}) = \sup(]-1, 0[\setminus \mathbb{Q}) = 0$ e $\max((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$ não existe em $\mathbb{R}$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

É verdadeira, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, pois $A \cap B$ é limitado.

(ii) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ tem limite em $\mathbb{R}$.

É verdadeira, pois tratar-se-á de uma sucessão decrescente e minorada, e portanto convergente em $\mathbb{R}$, pelo teorema das sucessões monótonas e limitadas.

(iii) Toda a sucessão crescente de termos em $A \cap B \cap \mathbb{Q}$ tem limite em $A \cap B$.

É falsa. Considere-se $a_n = \frac{-1}{2n}$.

(7) **II.** 1. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}, \qquad \lim \frac{n(2\cos(n\pi) + 1)}{n^2 + 1}, \qquad \lim \frac{n!}{(2n)! + n!}.$$

$\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{n+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{2+1/n}{1+1/n}} = \sqrt{2}.$

$\left|\dfrac{n(2\cos(n\pi)+1)}{n^2+1}\right| \leq \dfrac{3n}{n^2+1} = \dfrac{3}{n+1/n} \to 0$ pelo que $\lim \dfrac{n(2\cos(n\pi)+1)}{n^2+1} = 0.$

$\lim \dfrac{n!}{(2n)!+n!} = \lim \dfrac{1}{\frac{(2n)!}{n!}+1} = \lim \dfrac{1}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)+1} = 0.$

2. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\cos x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x^2+2)} \operatorname{arctg} x, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2+1)\operatorname{sen} x.$$

Como $x^{\cos x} = e^{\log x \cos x}$ e $\lim_{x\to 0^+} \log x \cos x = -\infty$ concluímos que $\lim_{x\to 0^+} x^{\cos x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{(x^2+2)} \operatorname{arctg} x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^{-2}+1}}{(x+2x^{-1})} \dfrac{\pi}{2} = 0.$

Sejam $x_k = k\pi$ e $y_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{k\to+\infty} (x_k^2+1)\operatorname{sen} x_k = 0$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} (y_k^2+1)\operatorname{sen} y_k = \lim\limits_{k\to+\infty} (y_k^2+1) = +\infty$ o limite não existe.

(6) **III.** 1. Considere uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\operatorname{tg} x}.$$

a) Determine o domínio de f.

Para x pertencer ao domínio de f devemos ter $1-x^2 \geq 0$ e $1-\operatorname{tg} x \neq 0$. Logo o domínio será o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1 \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\} = \left[-1, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, 1\right].$$

b) Estude f quanto a continuidade.

Sendo $x \mapsto 1-x^2$ (um polinómio) e $x \mapsto \sqrt{x}$ funções contínuas o teorema da continuidade da composta garante que $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ é uma função contínua no seu domínio. Como tg é uma função contínua os teoremas da continuidade da diferença e do quociente garantem que f é contínua.

c) Calcule

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)$$

e decida se f é ou não prolongável por continuidade a $\frac{\pi}{4}$.

Como $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \operatorname{tg} x = 1$ e tg é estritamente crescente numa vizinhança de 1

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{1-\operatorname{tg} x} = -\infty.$$

Como $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ é contínua em $\pi/4$ com valor $\sqrt{1-\pi^2/16} > 0$ temos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = -\infty$$

o que implica que f não é prolongável por continuidade a $\pi/4$.

2. Considere uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \phi(x) \geq x^2.$$

Mostre que existe $a \geq 0$ tal que $[a, +\infty[$ é o contradomínio de ϕ [**Sugestão**: Comece por mostrar que o contradomínio de ϕ é um intervalo não majorado.]

Como $\phi(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$ também devemos ter $\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = +\infty$. Como $\min\{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = 0$ devemos ter $\inf \phi \geq 0$. Como ϕ é contínua e $\mathbb{R}$ é um intervalo podemos aplicar o teorema do valor intermédio para garantir que o contradomínio de ϕ é um intervalo que, pelas considerações anteriores, só poderá ser $[\inf \phi, +\infty[$ ou $]\inf \phi, +\infty[$. Resta-nos excluir esta última possibilidade mostrando que $\inf \phi$ está no contradomínio de ϕ. De $\lim_{x\to\pm\infty} \phi(x) = +\infty$ sabemos que existirão $c < 0$ e $d > 0$ tais que $\phi(x) > \inf \phi + 1$ se $x < c$ e $\phi(x) > \inf \phi + 1$ se $x > d$. Aplicando o teorema de Weierstrass à restrição de ϕ a $[c, d]$ (mais uma vez graças a ϕ ser contínua) garantimos a existência de um mínimo de ϕ em $[c, d]$ que será necessariamente igual a $\inf \phi$.