Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

Campus da Alameda **22 de Janeiro de 2007, 9 horas**

Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,5) **I.** Considere

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 - |x| = |x-1|\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg}(2x) \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

a) Sendo $C = A \setminus B$, mostre que $C =]1/2, 1]$.

b) Determine, se existirem (em $\mathbb{R}$), os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos C e $C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

(i) Qualquer sucessão de termos em C é convergente.

(ii) Qualquer sucessão monótona de termos em C é convergente (em $\mathbb{R}$).

(iii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C é convergente para um elemento de C.

(3) **II.** 1. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{n! + 2}{3^n}, \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}, \qquad \lim \operatorname{arctg}\left(\sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}\right).$$

2. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, \qquad \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{x^2}.$$

(5) **III.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ através de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, & \text{se } x < 1, \\ -\log x + \alpha, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) Justifique que f é uma função contínua.

b) Determine α de maneira a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 1.

c) Seja $\tilde{f}$ o prolongamento por continuidade de f determinado na alínea anterior. Determine o seu domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada $\tilde{f}'$.

d) Mostre que $\tilde{f}$ não possui pontos de extremo.

e) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\phi(0) = 2$, $\phi'(0) = 3$. Calcule o valor de $(f \circ \phi)'(0)$.

(6) **IV.** 1. Seja $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 1}.$$

a) Justifique que g possui um ponto de máximo absoluto no intervalo $]0, \pi[$.

b) Mostre que existe uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ tal que $\lim x_n = +\infty$ e $g'(x_n) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

2. Determine uma primitiva de cada das seguintes funções:

a) $\dfrac{4e^x}{e^x + 4}$. b) $\dfrac{\log x}{x^2}$. c) $\dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}$.

3. Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equação $x = y^2$ e $x^2 = -y$.

(2,5) **V.** Considere a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, dt.$$

a) Justifique que ψ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule a sua derivada.

b) Determine os pontos de estacionaridade de ψ e classifique-os quanto a serem pontos de extremo e, na afirmativa, quanto a serem pontos de máximo ou mínimo. [**Sugestão**: no caso do ponto de estacionaridade em 0 use directamente a definição de ψ para determinar o seu sinal numa vizinhança de 0 de raio suficientemente pequeno.]