Cálculo Diferencial e Integral I

2^o Teste e 1^o Exame

Campus da Alameda — **8 de Janeiro de 2007, 9 horas**

Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para resolver o 2^o teste vire a página e resolva unicamente os grupos IV, V e VI

---

(4) **I.** 1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x^3+4x} \leq 0 \right\}, \qquad B = \{\, x \in \mathbb{R} : \log(3x) > 0 \}\,.$$

a) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, os supremos, ínfimos, máximos e mínimos de A e B.

b) Sendo (u_n) uma sucessão de termos reais decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se (u_n) tem termos em B e é crescente então é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Se (u_n) tem termos em A o conjunto dos seus sublimites em $\mathbb{R}$ é não vazio.

(2) **II.** Considere uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{cases} a_0 = 3/2, \\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \text{se } n \geq 0. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $1 < a_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Suponha que (a_n) é convergente. Calcule $\lim a_n$.

(4) **III.** 1. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{(n+1)!}{(n!+1)n}, \qquad \lim \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2+2}, \qquad \lim \sqrt[n]{1+e^n}.$$

2. Calcule (em $\overline{\mathbb{R}}$) ou mostre que não existem os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} [\operatorname{sen} x(\log(x+1) - \log x)], \qquad \lim_{x\to+\infty} (\log x)^{1/x}.$$

(4,5) **IV.** Seja $C \in \mathbb{R}$ e considere uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^x + Cx, & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 \log x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Determine $C \in \mathbb{R}$ tal que f é diferenciável em 0.

c) Com $C = -1$ mostre que existe um ponto de mínimo absoluto de f e que este ocorre num ponto $\alpha \in]0, +\infty[$.

d) Seja h a função inversa da restrição de f a $[\alpha, +\infty[$. Justifique que h é diferenciável em $]f(\alpha), +\infty[$ e calcule $h'(0)$.

(4) **V.** 1. Calcule $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

e aproveite para determinar todas as primitivas da função $\dfrac{x^2+3}{x^4-1}$ com limites finitos e iguais em $-\infty$ e em $+\infty$.

2. Calcule

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \cos x \, dx.$ c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_0^{e^{-x}} \operatorname{arctg}(t^2)\, dt.$

3. Calcule a área da região do plano definida por

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\operatorname{sen}(\pi x) \leq y \leq x - x^2\right\}.$$

(1,5) **VI.** Considere uma função contínua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e defina $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ via

$$F(x) = \int_0^{1/x} \psi(tx^2)\, dt.$$

a) Usando uma mudança de variáveis adequada determine funções G e H tais que

$$F(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^{G(x)} \psi(y)\, dy.$$

b) Mostre que se $\psi(0) = 0$ e ψ é diferenciável em 0 então existe $\lim_{x \to 0} F(x)$ (em $\mathbb{R}$).