Cálculo Diferencial e Integral I — 2015/16 — 1º semestre

1º Teste — LEIC-TP, LEGI, LERC, LEE — Versão B

7 de Novembro de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) I. a) 1. Escreva os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 6 \ \wedge \ |x-3| \geq 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x+1} \leq 1\right\}.$$

na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\max A$, $\sup(A \setminus \mathbb{Q})$, $\inf(A \cap \mathbb{Z})$ e $\max(B \setminus \mathbb{Q})$.

b) Considere o conjunto $C =]-\pi, 0[\cup]0, e]$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

ii. Existe uma sucessão (u_n) de termos em C, convergente, tal que $\lim u_n \notin C$.

iii. Existe uma sucessão decrescente (v_n), de termos em C, tal que a sucessão $((-1)^n v_n)$ é convergente.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2 + 2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0, 1]$ para $n \geq 2$.

b) Mostre que a sucessão é estritamente decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{3 + n(5(-1)^n + n^4)}{4n^5 - 1}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n}, \qquad \text{c)} \lim \frac{n! - 3^n}{2 - 4^n}.$$

(6,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq 0, \\ \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Calcule a função derivada f' em **todos** os pontos onde esta estiver definida.

(2,0) V. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau ímpar. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $|F(x)| \leq 2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = F(\alpha)$.