Cálculo Diferencial e Integral I — 2015/16 — 1º semestre

1º Teste — LEIC-TP, LEGI, LERC, LEE — Versão A

7 de Novembro de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) I. a) 1. Escreva os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0 \ \wedge \ |x-3| \geq 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} < 1\right\}.$$

na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\min A$, $\min(A \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(A \cap \mathbb{N})$ e $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

b) Considere o conjunto $C = [-\pi, -e[\cup]e, 6[$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

ii. Existe uma sucessão (u_n) de termos em C, convergente, tal que $\lim u_n \notin C$.

iii. Existe uma sucessão decrescente (v_n), de termos em C, tal que a sucessão $((-1)^n v_n))$ é convergente.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2+1}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in]0,1]$ para $n \geq 2$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{2(-1)^n + 2n(3+n^2)}{4n^3+7}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt{n} - \sqrt[4]{n^3}, \qquad \text{c)} \lim \frac{4^n + n!}{1-6^n}.$$

(6,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ -e^x \operatorname{sen} x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Calcule a função derivada f' em **todos** os pontos onde esta estiver definida.

(2,0) V. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau ímpar. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $|G(x)| \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $P(\alpha) = G(\alpha)$.