Cálculo Diferencial e Integral I — 2014/15 — 1º semestre

1º Teste — LEIC-TP, LEGI, LERC, LEE — Versão A

8 de Novembro de 2014

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{e^x - 1} \leq 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C =]0, 1/2]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\max C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).

ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

iii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(3,5) 2. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n > 0$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) 3. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{4n+7}}$ b) $\lim \dfrac{n\cos(n\pi) + 2n^3}{n^3+1}$ c) $\lim \dfrac{10^n + 5}{n! + 10}$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{1-x} - 1}, & \text{se } x > 1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.

d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f.

(2,0) 5. Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Recorda-se que F terá um *máximo local* em 0 se:

Existir $\epsilon > 0$ tal que se $x \in V_\epsilon(0)$ então $F(x) \leq F(0)$.

Suponha que F tem um máximo local em 0, que $\varphi(0) = 0$ e φ é contínua em 0. Mostre que $F \circ \varphi$ tem um máximo local em 0.

Resolução

(4,0) 1. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{e^x-1} \leq 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C =]0, 1/2]$.

Do significado geométrico de $|a-b|$ segue imediatamente que $A =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$. Quanto a B

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{e^x-1} \leq 0 &\Leftrightarrow (2x-1 \leq 0 \ \wedge \ e^x - 1 > 0) \ \vee \ (2x-1 \geq 0 \ \wedge \ e^x - 1 < 0) \\ &\Leftrightarrow (x \leq 1/2 \ \wedge \ x > 0) \ \vee \ (x \geq 1/2 \ \wedge \ x < 0) \\ &\Leftrightarrow x \in]0, 1/2] \end{aligned}$$

Portantanto $B =]0, 1/2]$. Consequentemente $C =]0, 1/2]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\max C \setminus \mathbb{Q}$.

$\inf C = 0$ e $\sup C = 1/2 = \max C$. $\min C$ e $\max C \setminus \mathbb{Q}$ não existem pois $0 \notin C$ e $1/2 \in \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).

Verdade, pois trata-se de uma sucessão monótona limitada.

ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

Verdade, pois trata-se de uma sucessão limitada.

iii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

Falso, considere-se $(1/(n+1))_{n \in \mathbb{N}_1}$ com $\lim \frac{1}{n+1} = 0 \notin C$.

(3,5) 2. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n}, \ \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n > 0$ para $n \geq 1$.

Para $n = 1$ temos $a_1 = 2 > 0$. Se para um certo $n \geq 1$ temos $a_n > 0$ então, como a exponencial só toma valores positivos, $a_{n+1} = a_n e^{-a_n} > 0$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

Como $a_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ temos $0 < e^{-a_n} < 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$. Daí que $a_{n+1} = a_n e^{-a_n} < a_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

Como a sucessão é monótona e limitada então é convergente. Definimos $c = \lim a_n$. Como $a_{n+1} = a_n e^{-a_n}$, por passagem ao limite de ambos os lados desta igualdade e usando a continuidade da exponencial, obtemos

$$c = ce^{-c} \Leftrightarrow c(1 - e^{-c}) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \ \vee \ 1 - e^{-c} = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Assim concluímos que $\lim a_n = 0$.

(4,5) 3. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{4n+7}}$.

$$\lim \sqrt{\frac{2n+1}{4n+7}} = \lim \sqrt{\frac{2+1/n}{4+7/n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) $\lim \dfrac{n\cos(n\pi) + 2n^3}{n^3+1}$.

$$\lim \frac{n\cos(n\pi) + 2n^3}{n^3+1} = \lim \frac{\cos(n\pi)/n^2 + 2}{1 + 1/n^3} = 2.$$

c) $\lim \dfrac{10^n + 5}{n! + 10}$.

Usando $\lim 10^n/n! = 0$ obtemos

$$\lim \frac{10^n/n! + 5/n!}{1 + 10/n!} = 0.$$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{1}{e^{1-x} - 1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

f está definida na união de dois intervalos abertos disjuntos. Basta estudar a continuidade das suas restrições a cada um desses intervalos. Usaremos o teorema da continuidade da composta de contínuas, continuidade da exponencial, continuidade do arctg, continuidade das funções racionais, continuidade dos polinómios e continuidade do produto por uma constante.
A função $]-\infty, 1[\ni x \mapsto \operatorname{arctg}(x^2)$ é contínua pois resulta da composição das funções $x \mapsto x^2$ e $y \mapsto \operatorname{arctg} y$ sendo cada uma destas contínua.
A função $[1, +\infty[\ni x \mapsto \dfrac{1}{e^{1-x} - 1}$ é contínua pois resulta da composição da função $x \mapsto e^{x-1}$ (o produto da exponcial por uma constante) com a função $y \mapsto \frac{1}{y-1}$ (uma função racional).

b) Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \pi/2$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{1-x}-1} = -1$$

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.

A função será prolongável por continuidade ao ponto 1 se existir e for finito $\lim_{x\to 1} f(x)$. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{e^{1-x}-1} = -\infty$ a função não é prolongável por continuidade ao ponto 1.

d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^4}, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{e^{1-x}}{(e^{1-x}-1)^2}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Daí que f é estritamente crescente em $]1, +\infty[$, estritamente crescente em $[0, 1[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

(2,0) 5. Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Recorda-se que F terá um *máximo local* em 0 se:

Existir $\epsilon > 0$ tal que se $xV_\epsilon(0)$ tivermos $F(x) \le F(0)$.

Suponha que F tem um máximo local em 0, que $\varphi(0) = 0$ e φ é contínua em 0. Mostre que $F \circ \varphi$ tem um máximo local em 0.

Se 0 é um ponto de máximo local de F então existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in V_\epsilon(0)$ então $F(x) \le F(0)$. Por outro lado, graças à continuidade de φ em 0, existe $\delta > 0$ tal que $t \in V_\delta(0) \Rightarrow \varphi(t) \in V_\epsilon(0)$. Portanto, se $t \in V_\delta(0)$ temos também $F(\varphi(t)) \le F(\varphi(0)) = F(0)$. A última afirmação diz-nos exactamente que 0 é um ponto de máximo local de $F \circ \varphi$.