TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I
Repetição de Testes e Exame (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

26 de Janeiro de 2015

Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.

1º Teste

(4,0) 1. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| \leq \pi + 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{e^x - e}{x+1} > 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = [-4-\pi, -1[\ \cup\ ]1, \pi]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\min C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Existe uma sucessão de termos em C com limite 1.

ii) Qualquer sucessão (a_n) de termos em C tal que $a_n/a_{n+1} < 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, é divergente.

iii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em C.

(4,0) 2. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1/3, \\ a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)a_n, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in\ ]0, 1[$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,0) 3. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{\sqrt{n} - n^3}{(4n + \sqrt{n})(n^2 + 2n\sqrt{n})} \qquad \text{b) } \lim \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) + 1\right)^n \qquad \text{c) } \lim \frac{n!(3n)!}{(4n)!}$$

(6,0) 4. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2, \pi/2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(1 - \operatorname{sen} x)}, & \text{se } |x| < \pi/2, \\ \operatorname{arctg}(e^{x+\pi/2}), & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Estude g quanto à continuidade e decida se g é prolongável por continuidade a cada um dos pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$.

c) Calcule a função derivada g' e determine os intervalos de monotonia de g.

(2,0) 5. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha-se que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq M\}$ é limitado e não vazio.

Mostre que F possui um máximo absoluto.

2º Teste

(4,5) 6. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1^-} xe^{\frac{1}{1-x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} 4x}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to 2^+} (x-2)^{\frac{1}{x-2}}.$$

(3,5) 7. Determine a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2+x}{4+x^2} \quad \text{e} \quad f(0) = \log 2.$$

(3,0) 8. Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a) } \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx, \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos x\,dx.$$

(3,0) 9. Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_{\cos x}^{x^2} h(t)\,dt.$$

Obtenha uma expressão geral para f'' e mostre que $f''(0) = 2h(0) + h(1)$.

(3,0) 10. Determine para que valores de $x\in\mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n+1}.$$

(3,0) 11. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 1$. Mostre que:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^t f(t)\,dt = +\infty$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{t-x} f(t)\,dt = 1$.