TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral I
# Repetição de Testes e Exame (Versão A)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

26 de Janeiro de 2015

*Para resolver um teste considere a secção respectiva. Para resolver o exame considere todas as perguntas. Justifique adequadamente todas as respostas.*

## 1º Teste

(4,0) 1. Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x+1| \leq \sqrt{2}+1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{e^x - e} > 0 \right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos $A$ e $B$ e mostre que $C = \left[-2-\sqrt{2}, -1\right[ \, \cup \, \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\max C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Existe uma sucessão de termos em $C$ com limite 0.

ii) Qualquer sucessão de termos em $C$ sem sublimites em $C$ é divergente.

iii) Qualquer sucessão $(a_n)$ de termos em $C$ e tal que $a_n a_{n+1} < 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, é divergente.

(4,0) 2. Considere uma sucessão de termo geral $b_n$ definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1/2, \\ b_{n+1} = b_n(b_n - 1) + 1, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $b_n \in \left]0,1\right[$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,0) 3. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n}+n^3}{(4n+\sqrt{n})(n^2+3n\sqrt{n})}$ b) $\lim \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+n\pi\right)+1\right)^n$ c) $\lim \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2, \pi/2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(1+\operatorname{sen} x)}, & \text{se } |x| < \pi/2, \\ \operatorname{arctg}(e^{x-\pi/2}), & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Estude $f$ quanto à continuidade e decida se $f$ é prolongável por continuidade a cada um dos pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$.

c) Calcule a função derivada $f'$ e determine os intervalos de monotonia de $f$.

(2,0) 5. Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha-se que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : G(x) \leq m\}$ é limitado e não vazio.

Mostre que $G$ possui um mínimo absoluto.

## 2º Teste

(4,5) 6. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1^+} x e^{\frac{1}{x-1}}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} 3x}{\operatorname{sen} x}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{1}{x-1}}.$$

(3,5) 7. Determine a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = \frac{1+x}{9+x^2} \quad \text{e} \quad g(0) = \log 3.$$

(3,0) 8. Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a)}\ \int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\, dx, \qquad \text{b)}\ \int_1^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx$$

(3,0) 9. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \int_{x^2}^{\operatorname{sen} x} h(t)\, dt.$$

Obtenha uma expressão geral para $g''$ e mostre que $g''(0) = h'(0) - 2h(0)$.

(3,0) 10. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2+3^n}.$$

(3,0) 11. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 3$. Mostre que:

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^t g(t)\, dt = +\infty.$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{t-x} g(t)\, dt = 3.$