Cálculo Diferencial e Integral I

1º ou 2º Teste ou Exame (v. B)
27 de Janeiro de 2014

LEE, LEGI, LEIC-TP, LETI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões.
Para realizar o 1º teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{x-3} \leq 2x\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x|x| \geq 0\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = \{0\} \cup]3, +\infty[$.

b) Determine, se existirem, o ínfimo de C, o máximo de C, o supremo de $C \setminus \mathbb{Q}$ e o mínimo de $C \cap \mathbb{N}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão estritamente decrescente de termos em C tem limite 3.

(ii) Qualquer sucessão crescente de termos em C é divergente (em $\mathbb{R}$).

(iii) Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(3,5) **II.** Seja $c \in [0, 1[$ e considere a sucessão (a_n) dada por

$$\begin{cases} a_1 = c, \\ a_{n+1} = \frac{a_n + a_n^3}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $a_n \in [0, 1[$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim a_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a) } \lim \frac{n^{1/2} + n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^2+1}} \qquad \text{b) } \lim \left(\frac{\operatorname{arctg} n}{\pi} + \frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{c) } \lim \frac{1 + n \cos n^3}{2n^3 - 1}$$

(6) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x} \operatorname{arctg} x$.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule f'.

c) Seja $g(x) = e^x f'(x)$. Justifique que g é uma função decrescente.

d) Calcule $g(0)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$. Mostre que g tem um único zero em $]0, +\infty[$.

e) Mostre que a função f possui no intervalo $]0, +\infty[$ um e um só ponto de extremo local. Mostre ainda que se trata de um ponto de máximo absoluto de f em $\mathbb{R}$.

(1,5) **V.** Seja $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua para a qual $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

a) Mostre que existe pelo menos uma solução da equação $h(x) = e^{1/x}$ para $x > 0$.

b) Supondo ainda que h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \qquad h'(x) > 0,$$

mostre que a equação $h(x) = e^{1/x}$ tem uma e uma só solução em $\mathbb{R}^+$.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\cos(x^2), \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0^+}(x+1)^{3/x}, \qquad \text{c)} \lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_0^{\operatorname{sen}(2x)} e^{-t^2}\,dt.$$

(2,0) **VII.** Determine a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x}{2x^2+3} & \forall x\in\mathbb{R},\\ f(0)=1. \end{cases}$$

(4,5) **VIII.** Calcule

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{3x+1}{x+1}\,dx, \qquad \text{b)} \int_{\log 3}^{\log 4} \frac{2e^x}{(2-e^x)^2}\,dx, \qquad \text{c)} \int_1^e \frac{2}{x(1+\log^2 x)}\,dx.$$

(3,0) **IX.** Calcule a área da região plana definida por

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2x \le y \le e^x - 1,\ x\le 1\right\}.$$

(4,5) **X.** a) Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) e, se possível, calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n+1)\,2^n}{e^{n+1}}.$$

b) Determine os valores de $x\in\mathbb{R}$ para os quais a série seguinte é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n x^n}{2+(2n+1)!}$$

(2,0) **XI.** Seja $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t}, & \text{se } t\neq 0,\\ 0, & \text{se } t=0. \end{cases}$$

Considere ainda uma função F definida por

$$F(x) = \int_0^1 x\,\phi(xt)\,dt.$$

a) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e determine F'.

b) Decida se F é diferenciável em 0 e, na afirmativa, calcule $F'(0)$.