
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões.

Para realizar o 1º teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{x-2} \geq x \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq x\}, \quad C = A \cap B.$$

- Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = \{0\} \cup]2, +\infty[$.
- Determine, se existirem, o supremo de C , o mínimo de C , o ínfimo de $C \setminus \mathbb{Q}$ e o máximo de $C \cap \mathbb{Z}$.
- Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
 - Qualquer sucessão estritamente decrescente de termos em C tem limite 2.
 - Qualquer sucessão crescente de termos em C é divergente (em \mathbb{R}).
 - Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(3,5) **II.** Seja $c \in [0, 1[$ e considere a sucessão (b_n) dada por

$$\begin{cases} b_1 = c, \\ b_{n+1} = \frac{b_n + b_n^5}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Mostre que $b_n \in [0, 1[$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.
- Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.
- Justifique que (b_n) é uma sucessão convergente e calcule o valor de $\lim b_n$.

(4,5) **III.** Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\text{a) } \lim \frac{n^{1/2} + n^{3/2}}{\sqrt{n^3 + 1}} \quad \text{b) } \lim \left(\frac{\arctg n}{\pi} + \frac{1}{3} \right)^n \quad \text{c) } \lim \frac{1 + n^2 \operatorname{sen} n^2}{3n^3 - 1}$$

(6) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \arctg x$.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Justifique que f é diferenciável em \mathbb{R} e calcule f' .
- Seja $g(x) = e^{-x} f'(x)$. Justifique que g é uma função crescente.
- Calcule $g(0)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. Mostre que g tem um único zero em $] -\infty, 0[$.
- Mostre que a função f possui no intervalo $] -\infty, 0[$ um e um só ponto de extremo local. Mostre ainda que se trata de um ponto de mínimo absoluto de f em \mathbb{R} .

(1,5) **V.** Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua para a qual $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- Mostre que existe pelo menos uma solução da equação $h(x) = \arctg x$.
- Supondo ainda que h é diferenciável em \mathbb{R} e

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) > 1,$$

mostre que a equação $h(x) = \arctg x$ tem uma e uma só solução.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2}}{\sin^2 x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{2/(x-1)}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \int_1^{\cos 2x} e^{-t^2} dt.$$

(2,0) **VII.** Determine a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições seguintes:

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{4x}{x^2 + 2} & \forall x \in \mathbb{R}, \\ g(0) = 2. \end{cases}$$

(4,5) **VIII.** Calcule

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{3x}{1+x} dx, \quad \text{b) } \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx, \quad \text{c) } \int_1^2 \frac{1}{x(1 - \log x)^2} dx.$$

(3,0) **IX.** Calcule a área da região plana definida por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - e^x \leq y \leq 2x, x \leq 1\}.$$

(4,5) **X.** a) Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) e, se possível, calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n + 1) 3^{n+1}}{\pi^n}.$$

b) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série seguinte é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n x^n}{(2n+1)! + 1}.$$

(2,0) **XI.** Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{se } t \neq 0, \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Considere ainda uma função F definida por

$$F(x) = \int_0^1 x \phi(xt) dt.$$

- a) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e determine F' .
b) Decida se F é diferenciável em 0 e, na afirmativa, calcule $F'(0)$.