TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 08 de Janeiro de 2018

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-e^{x-1}}{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg} x}$, **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}\frac{1}{t+1}\,dt}{1-\cos x}$.

(4,0) **II.** Calcule

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2+x^3}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$,

(3,5) **III.** Calcule a área da região do plano limitada por linhas de equação

$$x=0, \qquad x=\pi, \qquad y=x-\frac{\pi}{2}, \qquad y=\cos x.$$

(4,0) **IV.** 1. Decida quais das seguintes séries são convergentes e quais são divergentes

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{1}{n^2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{4^n}$.

(2,5) 2. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log(n+1/n)-\log n\right)$$

é convergente.

[*Sugestão*: Use o teorema de Lagrange ou a regra de Barrow para estimar

$$\log(n+1/n)-\log n$$

para $n\in\mathbb{N}_1$.]

(3,0) **V.** Seja $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $\lim_{t\to+\infty} h(t)=1$.

1. Mostre que $\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x} h(t)\,dt=+\infty$.
2. Calcule

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{2x} h(t)\,dt}{x}.$$