TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B)   9 de Novembro de 2019

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2-1}{x^2-1} \leq 1 \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : (|x-2|-3)(e^x-1) > 0 \}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e verifique que

$$B =]-1, 0[\cup]5, +\infty[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\sup B$, $\max(A \cap \mathbb{Z})$, $\inf(B \cap \mathbb{R}^+)$, $\min(A \cap B)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Todas as sucessões estritamente crescentes de termos em B são divergentes.

(ii) Se (b_n) é uma sucessão de termos em $B \cap \mathbb{R}^-$, a sucessão $\big(b_n(e^{1/n}-1)\big)$ converge para 0.

(iii) Se $f : B \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(B)$ é um intervalo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1/4, \\ a_{n+1} = a_n^5 + \dfrac{3a_n}{4}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $a_n \in [0, 1/4]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{2^n - 3^n}{3^n + 2}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt[n]{\frac{(e^n-1)n^2}{e^n+4}}, \qquad \text{c)} \lim \frac{(-1)^n \cos(n!+1)}{1+\log(n+2)}.$$

(6,0) **IV.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \operatorname{arctg}\left(e^{1/x}\right), & \text{se } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\left(e^{1/x}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine α de maneira a f ser prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Determine a derivada de f.

c) Designe por g o prolongamento por continuidade de f a 0.

i) Calcule $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ se existirem.

ii) Determine o contradomínio de g.

(2,0) **V.** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável verificando $h(0) = 0$ e $0 < h'(x) < 1 \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$ e considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ dada por

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = h(x_n), \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (x_n) é uma sucessão decrescente.