Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 11 de Novembro de 2017

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : e^{2x}(x^2-3) \leq 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2}{|x-3|} \geq 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\min(A\cap B)$, $\inf B$, $\max(A\cap\mathbb{Q})$, $\min(A\cap]0,+\infty[)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão crescente de termos em $A \cap B$ é convergente.

(ii) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ tem limite $-\sqrt{3}$.

(iii) Se (v_n) é uma sucessão de termos em $A \cap B$, então $\left(\frac{v_n}{n+1}\right)$ é convergente.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{3}, \\ b_{n+1} = b_n \operatorname{arctg} b_n, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $b_n \geq \sqrt{3}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$$b_{n+1} \geq \frac{\pi}{3} b_n.$$

c) Justifique que $b_n \to +\infty$. [Note que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.]

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{7^n - n!}{2^n+1}$, b) $\lim \dfrac{2(n+1)^5+3n^3}{1+3n(n^4+2)}$, c) $\lim \dfrac{(-1)^n \cos(\frac{1}{n})}{1-4n\sqrt{n}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \log(x^2+2), & \text{se } x < 0, \\ e^{-x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre, para $x = 0$, que g é contínua mas não diferenciável.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

c) Determine a derivada de g para $x \neq 0$.

d) Determine $g(]-\infty, 0])$.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(1) = -1$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$. Justifique cuidadosamente que φ tem máximo e mínimo em $\mathbb{R}$.