TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 14 de Novembro de 2020

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\geq 1\right\},B=\left\{\frac{2}{1+4k}:k\in\mathbb{Z}\right\},C=\{x\in\mathbb{R}:\log x\leq 1\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e C e verifique que

$$A\cap C=]0,1].$$

b) Determine, ou justifique que não existem, $\min A$, $\inf B$, $\inf(A\cap B\cap C)$, $\min(A\cap B\cap C)$, $\inf(C\setminus B)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe uma sucessão estritamente crescente de termos em B que é convergente.

(ii) Se $f:C\to\mathbb{R}$ é crescente e minorada o seu ínfimo é $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(iii) Se $g:A\cap C\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, g tem máximo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1=1, \\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}-\frac{1}{n}, & \text{se } n\geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $a_n\in[1,3[$, para todo o $n\in\mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão monótona.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim e^{-1/n}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$, b) $\lim \dfrac{n^2+1}{n\left(3+n\cos(\frac{1}{n})\right)}$, c) $\lim \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^{1/n}$.

(6,0) **IV.** Seja $\alpha\in\mathbb{R}$. Define-se a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} e^{\operatorname{arctg}(1/x)}, & \text{se } x>0, \\ \alpha+e^{\operatorname{arctg}(1/x)}, & \text{se } x<0. \end{cases}$$

a) Determine α de maneira a f ser prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Designe por g o prolongamento por continuidade de f a 0.

i) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ se existirem.

ii) Determine o contradomínio de g.

(2,0) **V.** Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(0)>h(\pi/2)=h(-\pi/2)$.

Decida se pode garantir que a função composta definida por $\psi(x)=h(\operatorname{arctg}(x))$ possui ou não um máximo absoluto.