Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 9 de Novembro de 2019

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} < 1 \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : (|x-1| - 2) \log x > 0 \}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e verifique que

$$B =]0, 1[\cup]3, +\infty[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\sup B$, $\max(A \cap \mathbb{Z})$, $\inf(B \cap \mathbb{R}^+)$, $\min(A \cap B)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe uma sucessão estritamente crescente de termos em B que é convergente.

(ii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em B, a sucessão $(a_n \operatorname{sen}(1/n))$ converge para 0.

(iii) Se $f : B \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(B)$ tem mínimo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1/4, \\ a_{n+1} = a_n^3 + \dfrac{a_n}{2}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $a_n \in [0, 1/4]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{n\sqrt{n} - n^2}{n^2 + 2}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt[n]{\frac{(e^n - 1)n^2}{n^2 + 4}}, \qquad \text{c)} \lim \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n^3 + 1)}{1 - \sqrt{n}}.$$

(6,0) **IV.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(e^{1/x}\right), & \text{se } x > 0, \\ \alpha + \operatorname{arctg}\left(e^{1/x}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine α de maneira a f ser prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Determine a derivada de f.

c) Designe por g o prolongamento por continuidade de f a 0.

i) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ se existirem.

ii) Determine o contradomínio de g.

(2,0) **V.** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável verificando $h(0) = 0$ e $0 < h'(x) < 1 \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}$ e considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ dada por

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = h(x_n), \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre que $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (x_n) é uma sucessão decrescente.