TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 11 de Novembro de 2017

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-5}{|x-2|} \leq 0 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{-x}(x^2-1) \geq 0 \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, 2[\cup]2, \sqrt{5}].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\max(A \cap \mathbb{Q})$, $\inf B$, $\inf(A \cap B)$, $\min(B \cap]0, +\infty[)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ é convergente.

(ii) Toda a sucessão crescente de termos em $A \cap B$ é convergente com limite em $A \cap B$.

(iii) Existe uma sucessão (u_n), de termos em $A \cap B$, tal que $(-1)^n u_n$ é convergente.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n \operatorname{arctg} a_n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $0 < a_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$$a_{n+1} \leq \frac{\pi}{4} a_n.$$

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite. [Note que $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.]

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{e^n + n!}{(n+1)! + (-1)^n}$, b) $\lim \dfrac{2\sqrt{n} + (-1)^n \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{1 - \sqrt{n}}$, c) $\lim \dfrac{5 - 4^n}{3^n + \pi^n}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^x \operatorname{sen} x, & \text{se } x < 0, \\ x^2 \log(1 + x^2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre, para $x = 0$, que f é contínua mas não diferenciável.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f para $x \neq 0$.

d) Determine $f([0, +\infty[)$.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(1) = -1$ e $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$. Justifique cuidadosamente que φ tem máximo e mínimo em $\mathbb{R}$.