TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral I

## Repetições de Testes e Exame 17/07/2021

## LEE, LEGI, LEIC-T, LETI

1. Preencha o nome, número de aluno e curso abaixo.
2. Para garantir que todas as suas respostas são consideradas, em particular se respondeu às perguntas não sequencialmente ou se uma pergunta não está respondida em páginas consecutivas, numere as páginas do seu caderno de respostas e indique-as na linha e coluna respectivas da tabela abaixo.
3. Se pretender realizar o 1º teste, resolva os grupos **I** a **V**.
4. Se pretender realizar o 2º teste, resolva os grupos **VI** a **X**.
5. Se pretender realizar o exame, resolva os grupos **I** a **X**.
6. Para um teste ser considerado deve ser entregue até 1h 30m após o início da prova. Depois disso todas as provas são automaticamente consideradas exames.

Nome: ______________________________

Número: ____________________ Curso: ____________________

| Pergunta | Páginas | Classificação |
|---|---|---|
| Ia | | |
| Ib | | |
| Ici | | |
| Icii | | |
| Iciii | | |
| IIa | | |
| IIb | | |
| IIc | | |
| IIIa | | |
| IIIb | | |
| IIIc | | |
| IVa | | |
| IVbi | | |
| IVbii | | |
| V | | |
| VIa | | |
| VIb | | |
| VIc | | |
| VII | | |
| VIII | | |
| IXa | | |
| IXb | | |
| IXc | | |
| Xa | | |
| Xb | | |

**Nota**
As perguntas são classificadas de 0 a 10, sendo a cotação de cada pergunta só considerada no momento do cálculo da classificação final.

Classificação: ____________

Número de ordem: ____________

Rúbrica do docente: ____________

# Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão B) 17 de Julho de 2021

**LEIC-T, LEGI, LETI, LEE**

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

## 1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{e^x - 1}{e^x - 3} \right| < 1 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \cos(1/x) = 1\}, \qquad C = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Identifique o conjunto $A$ e verifique que

$$A \subset \,]-\infty, 2[.$$

b) Determine, ou justifique que não existem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\max A$, $\sup A$, $\max(A \cap B)$, $\inf(B \cap C)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em $C$ possui subsucessões convergentes.

(ii) Qualquer sucessão convergente de termos em $B$ tem limite 0.

(iii) Se $g : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $g(A)$ tem supremo.

(4,0) **II.** Considere a sucessão $(x_n)$ definida por

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \frac{4x_n}{\pi} \operatorname{arctg}(e^{x_n}), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Justifique que $x_n \geq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Justifique que $(x_n)$ é uma sucessão crescente.

c) Determine $\lim x_n$ ou mostre que não existe.

(4,0) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim e^n \operatorname{sen}(e^{-n})$, b) $\lim \frac{\operatorname{arctg}(n!)}{\operatorname{arcsen}(e^{1/n})}$, c) $\lim \left(\frac{\cos(1/n)}{n!}\right)^{1/n}$.

(4,0) **IV.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se a função $f : [-1, +\infty[ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}(x+1), & \text{se } x \in [-1, 0[, \\ \frac{\alpha}{2x+1}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Determine $\alpha$ de maneira a $f$ ser prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Designe por $g$ o prolongamento por continuidade de $f$ a 0.

i) Calcule $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ se existir.

ii) Determine o contradomínio de $g$.

(3,0) **V.** Seja $h : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$, $h(1) = 2$.

Mostre que o contradomínio da função $\Psi$ definida por $\Psi(x) = h(x) - x$ é da forma $]-\infty, M]$ em que $M \geq 1$.

## $2^{\underline{o}}$ Teste

(4,5) **VI.** Calcule

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x^4}\cos(t^2)\,dt}{x\operatorname{sen} x}$.  b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.  c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

(4,0) **VII.** Estude, quanto a crescimento, sentido da concavidade do gráfico, extremos locais e pontos de inflexão, a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

(4,0) **VIII.** Calcule a área da região

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le \frac{1}{2}x\le y\le x\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

(4,5) **IX.** Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-n^2}{n^2 2^n}$.  b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^4}$.  c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{1/n} e^{-1/t}\,dt$.

(3,0) **X.** Sejam $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funções contínuas com $g\ge 0$ e verificando $\lim_{m\to+\infty}\int_{-m}^{m} g(x)\,dx=1$.
Calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\epsilon}\int_{-1}^{1} f(\epsilon x)g(x/\epsilon)\,dx.$$

[**Sugestão**: Comece por considerar uma mudança de variável adequada.]