

Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão B) 28 de Janeiro de 2020

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2 - |x-1|} \geq 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{x^2-1} \geq e \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e verifique que

$$C = A \cap B = [2, 3].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\inf B$, $\sup(C \setminus \mathbb{Q})$, $\min C$, $\max(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C então $e^{-n}a_n \rightarrow 0$.

(ii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C estritamente decrescente então $\lim a_n = 2$.

(iii) Se $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então f tem mínimo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_1 = \log 4, \\ x_{n+1} = \log \left(1 + \frac{1}{2}e^{x_n} \right), \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $x_n \geq \log 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (x_n) é monótona e decida se é crescente ou decrescente.

c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{n^3 + (-1)^n n + 2}{2n(n^2 + 1)}, \quad \text{b) } \lim \frac{\text{sen}(3^n)}{2 + 3^n}, \quad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{3e^n - 1}{n^2 + \pi^n}}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{se } x < 0, \\ -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Decida se h é ou não prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

c) Determine a derivada de h e intervalos de monotonia da função.

d) Determine o contradomínio de h .

(2,0) **V.** Seja $f :]1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{-2x}$. Justifique que f é injectiva e, sendo g a função inversa de f , calcule $g'(e^{-2})$ e $g''(e^{-2})$.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cos x}{1 - e^{x-2}},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{\sin x}.$

(5,0) **VII.** Calcule

a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{2+x^4} dx,$

b) $\int_1^2 \frac{\log^2 x}{x(1+\log^2 x)} dx,$

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano definida por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, xe^x \leq y \leq e^x\}.$$

(5,0) **IX.** 1. Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 1}.$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! + 1}{(2n)!}.$

2. Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{e^n + 1}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(3,0) **X.** Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{x-1}^{x^2} e^{t^2} dt.$$

a) Mostre que ϕ não é majorada.

b) Mostre que ϕ possui um ponto de mínimo local no intervalo $]0, 1[$.