TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão B) 29 de Janeiro de 2019

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2+1| \leq 3\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x+1)\log x}{x-3} \geq 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cup B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \cup]3, +\infty[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\inf A$, $\sup B$, $\min(C \cap \mathbb{Z})$, $\min(C \setminus]-\infty, 0[)$, $\min(C \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.

(ii) Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(iii) Toda a sucessão decrescente de termos em C é convergente.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (x_n) definida por

$$\begin{cases} y_1 = 16, \\ y_{n+1} = \sqrt{y_n} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $y_n \in \left[\frac{1}{4}, 16\right]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (y_n) é decrescente.

c) Justifique que (y_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{\operatorname{sen} n + (-1)^n \operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n}+1}$, **b)** $\lim \left(\dfrac{3n^2-1}{2+4n^2}\right)^n$, **c)** $\lim \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{x+2}, & \text{se } x < -2, \\ x \operatorname{arctg}(x+2), & \text{se } x \geq -2. \end{cases}$$

a) Decida se f é ou não contínua no ponto -2.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f.

d) Mostre que f possui um mínimo absoluto que ocorre num ponto de $]-2, 0[$.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$\varphi(n+1) = (-1)^n n + \varphi(n-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x)$ não existe.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 0^+} x^{\log x}$, **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1}\int_1^{\cos x} \frac{e^t}{t^2}\,dt$.

(5,0) **VII.** Calcule

a) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg}(x^2)\,dx$, **b)** $\int_1^e \frac{2+\log^3 x}{x}\,dx$,

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equação $x = \sqrt{8y}$ e $x^2 = 4y$.

(5,0) **IX.** 1. Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes e se possível calcule a soma de uma delas.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + (-1)^n \pi^n}{4^n}$. **b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(\sqrt{n}+2)}{(n^2+1)(n^2\sqrt{n}+1)}$.

2. Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^3(3+n!)} x^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(3,0) **X.** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(x) \geq 1$ para todo o x. Define-se uma função g através de

$$g(x) = \int_{x^2}^{x \log x} \frac{h(t)}{t}\,dt,$$

a) Determine o domínio de g.

b) Mostre que o contradomínio de g é um intervalo ilimitado contido em $]-\infty, 0[$.