

Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão A) 29 de Janeiro de 2018

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 2} \geq 1 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 5\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B = [-3, -2[\cup]1, 7].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\inf C$, $\max C$, $\sup C \setminus \mathbb{Q}$, $\min(C \cap \mathbb{R}^+)$, $\max(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) O conjunto dos sublimites de uma sucessão de termos em C é não vazio.

(ii) Se f é uma função contínua em C , f tem máximo em C .

(iii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C , a sucessão $\left(\frac{3^n a_n}{n!}\right)$ é convergente.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} e^{-1/n}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $a_n \in [1, 2[$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (a_n) é monótona crescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{2n(n^2 + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + 3n(n^2 + 2)}, \quad \text{b) } \lim \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]^n, \quad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{1 + \pi^n}}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} e^{-x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Decida se f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f .

d) Determine o contradomínio de f .

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\varphi(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$. Mostre que a equação $\varphi(x) = x^2$ tem, pelo menos, uma raiz.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x^2} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t+1} dt}{\int_0^{x^4} \frac{\cos t}{t+1} dt}.$

(4,0) **VII.** 1. Calcule

a) $\int_0^1 \frac{1 + \operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx,$

b) $\int_0^1 (1-x)e^{-x} dx,$

(2,0) 2. Determine a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica todas as condições seguintes:

$$\begin{cases} \forall x \neq 0 & f'(x) = \frac{4}{x^3 + 4x}, \\ f(-1) = 0, \\ f(1) = \log 5. \end{cases}$$

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano definida por

$$\left\{ (x, y) : x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \operatorname{tg} x \leq y \leq \sqrt{2} \operatorname{sen} x \right\}.$$

(5,0) **IX.** Decida quais das seguintes séries são convergentes, quais são divergentes e, se possível, calcule a soma de uma delas:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n!}{n!},$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{1 + n^3 \sqrt{n}}.$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}.$

(2,0) **X.** Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definindo

$$g(x) = \int_0^x h(t-x) dt,$$

justifique que g é diferenciável em \mathbb{R} e relacione a sua derivada com a função h .