
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) I. Calcule:

a) $\int_{-1}^1 t \cos(2t) dt$, b) $\int_0^1 \frac{2t}{(t^2 + 1)^7} dt$, c) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(t-1)(t^2 + 1)} dt$.

a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t \cos(2t) dt &= \left[\frac{t \operatorname{sen}(2t)}{2} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} dt \\ &= \frac{\operatorname{sen} 2}{2} + \frac{\operatorname{sen}(-2)}{2} + \left[\frac{\cos(2t)}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{\cos 2}{4} - \frac{\cos(-2)}{4} = 0. \end{aligned}$$

ou, em alternativa, podemos reconhecer que a função integranda é ímpar logo o integral no intervalo $[-1, 1]$ é igual a 0.

b)

$$\int_0^1 \frac{2t}{(t^2 + 1)^7} dt = \left[\frac{(t^2 + 1)^{-6}}{-6} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2^6} - 1 \right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2^6} \right).$$

c) Atendendo à decomposição em fracções simples

$$\frac{1}{(t-1)(t^2 + 1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1},$$

obtemos

$$A(t^2 + 1) + (Bt + C)(t - 1) = 1,$$

e, conseqüentemente, $A = 1/2$, $B = C = -1/2$. Então,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t-1)(t^2 + 1)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\log |t-1| - \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) - \operatorname{arctg} t \right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{(t-1)(t^2 + 1)} dt &= \left[\frac{1}{2} \left(\log |t-1| - \frac{1}{2} \log(t^2 + 1) - \operatorname{arctg} t \right) \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\log |-2| - \frac{1}{2} \log(2) - \operatorname{arctg}(-1) \right) = -\frac{1}{4} \log 2 - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(3,0) **II.** Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x}.$$

a) Dado que, para todo o $x > 0$,

$$0 \leq \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

concluimos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2} = 0$.

b) Temos uma indeterminação do tipo $0/0$; aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{x} = 0,$$

atendendo a que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

c) De novo, uma indeterminação do tipo $0/0$; aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1+x^2} = 1.$$

(4,0) **III.** Calcule a área da região plana limitada definida por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-x+1} - 1 \leq y \leq x^3 - 1 \text{ e } x \leq 2\}.$$

Reconhece-se que $e^{-x+1} - 1 \leq x^3 - 1$ se e só se $x \geq 1$. Daí que a área da região seja dada por

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 - 1 - (e^{-x+1} - 1) dx &= \int_1^2 x^3 - e^{-x+1} dx = \left[\frac{x^4}{4} + e^{-x+1} \right] \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{2^4}{4} + e^{-2+1} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{11}{4} + e^{-1}. \end{aligned}$$

(5,0) **IV.** 1. Classifique quanto a convergência absoluta, convergência simples e divergência as séries

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{e^n + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n}.$$

a) Como $\left| \frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{5/2}}$ e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ é convergente concluimos, usando o critério de comparação e convergência absoluta, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^{5/2}}$ é absolutamente convergente.

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{e^n}{e^n + 1}$ não existe concluimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{e^n + 1}$ é divergente.

c) Como, para $n \geq 3$, temos $\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$, e a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, concluímos que a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n}$ é divergente. Alternativamente o resultado pode obter-se do critério do integral visto que $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\log^2 x)$.

2. Considere a função φ definida pela série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(2n)!(n+1)}$$

nos pontos onde a série converge.

a) Determine o domínio de φ .

Escrevendo a série de potências na forma $x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ com $a_n = \frac{1}{(2n)!(n+1)}$ verificamos

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)}{n+1} = +\infty$$

pelo que a série de potências tem raio de convergência $+\infty$. Sendo assim o domínio da função φ é \mathbb{R} .

b) Justifique que φ é diferenciável e obtenha a respectiva série de potências.

Sabemos que uma série de potências é diferenciável no intervalo $] -R, R[$ em que R é o raio de convergência podendo a diferenciação efectuar-se derivando a série termo a termo. Daí que

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

(5,0) **V.** 1. Considere a função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_{\log x}^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

Justifique que f é diferenciável e obtenha uma expressão para f' .

O teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta permitem obter que f é diferenciável em $]0, +\infty[$ com

$$f'(x) = 2xe^{-x^4} - \frac{1}{x} e^{-\log^2 x}.$$

2. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $0 < g(x) \leq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere uma função real de variável real ψ definida por

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2} dt.$$

Justifique que o contradomínio de ψ é um intervalo da forma $] \alpha, \beta [$ em que $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

O integral indefinido é uma função contínua pelo que o teorema do valor intermédio implica que o contradomínio é um intervalo. Do Teorema Fundamental, tem-se

$$\psi'(x) = \frac{g(x)}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $g > 0$, vem $\psi' > 0$, logo ψ é uma função estritamente crescente em \mathbb{R} com $\psi(0) = 0$. Então, existem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \beta \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \alpha.$$

Tem-se, assim, $\psi(\mathbb{R}) =] \alpha, \beta [$ onde $\alpha < 0 < \beta$.

Usando a estimativa para g obtém-se

$$|\psi(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dx \right| = |\arctg x| \leq \frac{\pi}{2}$$

e daí $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$.