

## Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 9 de Janeiro de 2017

**LEIC-T, LEGI, LETI, LEE**

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{3/x}$ .

(4,0) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a)  $\frac{1}{4 - 5x}$ ,      b)  $\frac{\sin(1/x)}{x^2}$ .

2. Determine a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} f'(x) = (x + 1) \operatorname{arctg} x, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região plana definida pelas condições

$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{3 - e^x}.$$

(4,0) **IV.** Considere a função definida por

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{\sin t} dt.$$

a) Mostre que  $g$  está definida se  $x \in ]0, \sqrt{\pi}[$ .

b) Calcule  $g'(x)$ .

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n(n+3)}}{n^2 + 2n + 3}$ ,      b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ ,      c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ .

(2,0) **VI.** Seja  $h : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, não negativa e tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)e^t = 0.$$

Mostre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h(t) dt$  existe em  $\mathbb{R}$ .