

## Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 4 de Janeiro de 2016

**LEIC-T, LETI, LEE, LEGI**

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin x)}{\log x}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{1/\cos(\pi x/2)}$ .

(4,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a)  $e^x \sin(5 + 3e^x)$ ,      b)  $\frac{2 \operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2}$ .

2. Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região plana definida por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } -2 \operatorname{arctg} x \geq y \geq -\pi + 2 \operatorname{arctg} x\}.$$

(4,0) **IV.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \int_{-2}^x (x+2)g(t) dt.$$

a) Mostre que se  $g$  é positiva então  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Justifique que  $f$  é diferenciável e calcule  $f'$ .

c) Supondo que  $g$  é uma função ímpar e  $g(2) = 1$ , calcule  $f(2)$  e  $f'(2)$ .

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3}}{n(n^2 + 2)}$ ,      b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ,      c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 - 1}{3^n}$ .

(2,0) **VI.** Seja  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+)$  tal que  $\varphi'(1) = 0$ ,  $\varphi''(1) = -2$ . Sendo  $\psi(x) = \varphi(e^x)$ , calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x^2}.$$