
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \right\}, \quad C = (A \cap B) \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = \left[-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2} \right].$$

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C .

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Qualquer sucessão de termos em A é convergente (em \mathbb{R}).
- (ii) Qualquer sucessão de termos em C é divergente.
- (iii) Toda a sucessão de termos em C tem uma subsucessão convergente.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{2}, \\ b_{n+1} = \frac{3b_n}{(2n+2)(2n+1)}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$b_n = \frac{3^n}{(2n)!}.$$

b) Indique o valor de $\lim b_n$.

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os limites das seguintes sucessões :

$$\text{a) } \lim \frac{n^2 \sqrt{n}}{n^3 + 4n + 2} \quad \text{b) } \lim \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 9} \quad \text{c) } \lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{3^n + 1}}$$

(6) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{4x-x^2}, & \text{se } x < 1, \\ \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) Decida, justificando, se existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.
- d) Mostre que a função é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$, mas não é monótona em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- e) Indique, justificando, o contradomínio de f .

(2,5) **V.** Seja f uma função contínua em \mathbb{R} verificando

$$f\left(\frac{4n + (-1)^n}{4n + 2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 \log n}{1 - n^2}\right), \quad \text{para todo o } n \geq 2.$$

Calcule, justificando, o valor de $f(1)$.