Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A)   12 de Novembro de 2016

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+3| > 5\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : \log \frac{x}{\pi} \leq 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B =]1, \pi].$$

b) Indique os conjuntos dos minorantes e dos majorantes de C. Determine, se existirem, o supremo e o máximo de $C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente, de termos em C, é convergente (em $\mathbb{R}$).

(iii) Se (u_n) é uma sucessão crescente, de termos em C, então (u_n) é convergente e $\lim u_n = \pi$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\, a_n^2, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $0 < a_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (a_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{(-1)^n n}{2n^2+3}$,   b) $\lim \dfrac{4^{n+1} - n^{10}}{n^8 + 4^n}$,   c) $\lim \dfrac{1 - \operatorname{sen}(3^n)}{2 + n\sqrt{n}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é diferenciável e obtenha a função derivada f'.

c) Verifique que existe o prolongamento por continuidade F de f ao ponto $x = 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de F.

e) Determine justificadamente o contradomínio de f.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$. Prove que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Sugestão: Comece por verificar que existem $a < 0$ e $b > 0$ tais que $\varphi(a) < \varphi(0)$ e $\varphi(b) < \varphi(0)$.