Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão B) 30 de Janeiro de 2017

LEIC-T, LEE, LEGI, LETI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(4,5) I. Considere os conjuntos

$$A = \{t \in \mathbb{R} : \log(t+1) \leq 1\}, \qquad B = \{\cos t : t \in [0, \pi/3]\}, \qquad C = A \cup B.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião de intervalos, justificando que $C =]-1, e-1]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup C$, $\inf C$, $\min C$, $\max C$ e $\sup(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Qualquer sucessão de termos em C, estritamente crescente, tem limite $e-1$.

ii) Toda a função decrescente definida em C é majorada.

iii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C, a sucessão $(u_n/4)^n$ tem limite 0.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral b_n definida por

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_{n+1} = b_n\, e^{-3n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $b_n \in]0, 3]$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,0) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{e^{3n} + n^3 + 3}{(e^{2n}+1)\sqrt{e^{2n}+5}}, \qquad \text{b)} \lim \frac{(n+1)! + 2^n}{3^n n!}.$$

(7,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\log(-t)}, & \text{se } t < 0 \text{ e } t \neq -1, \\ \frac{te^{-t}}{t+1}, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

a) Decida se f é ou não prolongável por continuidade a cada um dos pontos -1 e 0.

b) Calcule $\lim_{t \to -\infty} f(t)$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

c) Determine a função derivada f'.

d) Determine os intervalos de monotonia de f e os seus pontos de máximo e mínimo local se existirem.

e) Determine justificadamente o contradomínio de f.

(2,0) V. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função uma função duas vezes diferenciável e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = (t - t^3)g(t).$$

Mostre que existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f''(c) = 0$.

2º Teste

(3,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{xe^x - \operatorname{sen} x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (e^{t^2} - e^t)\, dt}{\int_1^x \operatorname{sen}(t^2-1)\, dt}$.

(5,0) VII. 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $x^2\sqrt{x^3+5}$, b) $x\cos x$.

2. Calcule

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x+4}{e^{2x}+1}\, dx.$$

(4,5) VIII. Considere

$$\psi(x) = \int_0^{x^2} e^{-3\sqrt{t}}\, dt\ .$$

a) Determine o domínio de ψ e calcule a sua derivada.

b) Determine, se existirem, os pontos de extremos locais ou absolutos de ψ.

(5,0) IX. 1. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 3n}{n^2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n+3}}$.

2. Determine para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{3^n} (t-3)^n.$$

(2,0) X. Prove que a área A da região

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le e^{-x^2}\right\}$$

verifica

$$0 < A = 2\int_0^{\beta} (e^{-t^2} - t)\, dt < 1$$

em que $\beta > 0$ satisfaz $e^{-\beta^2} = \beta$.