Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A) 30 de Janeiro de 2017

LEIC-T, LEE, LEGI, LETI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(4,5) I. Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x+2) \leq 1\}, \qquad B = \{\operatorname{sen} x : x \in [0, \pi/3]\}, \qquad C = A \cup B.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião de intervalos, justificando que $C = \left]-2, \sqrt{3}/2\right]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup C$, $\inf C$, $\min C$, $\max C$ e $\sup(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Qualquer sucessão de termos em C, estritamente decrescente, tem limite -2.

ii) Toda a função decrescente definida em C é majorada.

iii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C, a sucessão $(u_n/3)^n$ tem limite 0.

(3,5) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = a_n\, e^{-2n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in \left]0, 2\right]$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,0) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{e^{2n} + n^2 + 1}{(e^n + 1)\sqrt{e^{2n} - 1}}, \qquad \text{b) } \lim \frac{n! + 3^n}{2^n (n+1)!}.$$

(7,0) IV. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x}, & \text{se } x > 0 \text{ e } x \neq 1, \\ \frac{xe^x}{x-1}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Decida se g é ou não prolongável por continuidade a cada um dos pontos 0 e 1.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

c) Determine a função derivada g'.

d) Determine os intervalos de monotonia de g e os seus pontos de máximo e mínimo local se existirem.

e) Determine justificadamente o contradomínio de g.

(2,0) V. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função uma função duas vezes diferenciável e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = (x^3 - x) f(x).$$

Mostre que existe $z \in \left] -1, 1 \right[$ tal que $g''(z) = 0$.

2º Teste

(3,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{xe^x+\cos x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2x}\right)$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2}-t-1)\,dt}{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}$.

(5,0) VII. 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $x^4\sqrt{x^5+3}$, b) $x \operatorname{sen} x$.

2. Calcule

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^t+1}{e^{2t}+1}\,dt.$$

(4,5) VIII. Considere

$$\phi(x) = \int_0^{x^2} e^{-2\sqrt{t}}\,dt.$$

a) Determine o domínio de ϕ e calcule a sua derivada.

b) Determine, se existirem, os pontos de extremos locais ou absolutos de ϕ.

(5,0) IX. 1. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)\sqrt{n}}$.

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n}(x-2)^n.$$

(2,0) X. Prove que a área A da região

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y \le e^{-x^2}\right\}$$

verifica

$$0 < A = 2\int_0^{\alpha} (e^{-t^2} - t)\,dt < 1$$

em que $\alpha > 0$ satisfaz $e^{-\alpha^2} = \alpha$.